Trao đổi trên diễn đàn: www.myyagy.com/mientay

Nguyễn Thị Thu Hiền, Khoa Vật lý, đại học Vinh
Nguyễn Thanh Lâm, www.mientayvn.com

Tài liệu tham khảo: Robert D.Guenther, modern optics, John Wiley and sons, 1990

Quang học phi tuyến

Các hiệu ứng quang phi tuyến liên quan đến sự phát hiện ánh sáng và trong tất cả các thiết bị điều biến quang học được thảo luận trong chương 14. Trước năm 1960, các hiệu ứng quang phi tuyến này là khác thường và các hệ thống quang học truyền thống được phân tích bằng lý thuyết tuyến tính. Việc bỏ qua các hiệu ứng quang phi tuyến là do không thể tạo ra các trường quang học mạnh. Với sự kiện chế tạo thành công laser ruby của **Theodore Harold Maiman** vào tháng 7 năm 1960 thì đã có một nguồn ánh sáng mạnh có thể tạo ra các hiệu ứng quang phi tuyến (buồng laser với công tắc Q có độ sáng lớn bằng 10^{12} lần đèn hồ quang thủy ngân áp suất cao). Thí ngiệm quang phi tuyến đầu tiên được thực hiện bởi **Peter A.Franken** cùng với một số nhà nghiên cứu khác ở trường đại học **Michigan**. Nhóm nghiên cứu Michigan đầu tiên đã thực hiện thí nghiệm phát sóng hài bậc hai, sau đó là thí nghiệm chỉnh lưu quang học. Lĩnh vực quang phi tuyến đã phát triển nhanh và ngày nay nó đã trở thành một lĩnh vực nghiên cứu rộng lớn và năng động.

Lý thuyết mà chúng ta xây dựng cho quang học đã giả sử rằng : mối quan hệ giữa điện trường đặt vào và đáp ứng của môi trường vật liệu là tuyến tính hay độ phân cực

$$P = \varepsilon_0 \chi E$$

Dùng laser thông thường chẳng hạn như laser Nd:YAG, thì có thể tạo ra một xung 1Mw, với độ rộng xung là 1 nano giây (bằng 10^9 s) ở bước sóng 1 μ m và đường kính chùm ánh sáng thông thường là $1mm^2$ sẽ cho ta một cường độ điện trường peak là 10^7 V/m. Nếu chúng ta tập trung chùm ánh sáng này vào diện tích khoảng λ^2 thì cường độ điện trường có thể đạt đến 10^{10} V/m. Cường độ điện trường này vào bậc cường độ điện trường nguyên tử cho nên nó quá lớn và vì vậy không thể xem mối quan hệ giữa ***P*** và ***E*** là tuyến tính nữa. Trong chương này, chúng ta sẽ xét các hiệu ứng quang phi tuyến bằng cách giả sử mối quan hệ giữa ***P*** và ***E*** được miêu tả bởi chuỗi lũy thừa sau:

$$P_i^w = P_i^0 + \sum_j x_{ij} E_j^w + \sum_{j,l} x_{ijl} \Delta_l^2 E_j^w + \sum_{j,l} x_{ijl} E_j^{w_1} E_l^{w_2} + \sum_{j,l,m} x_{ijlm} E_j^{w_1} E_l^{w_2} E_m^{w_3} + \sum_{j,l} x_{ijl} E_j^{w_1} B_l^{w_2} + \ \ldots$$

Điều này có nghĩa là chúng ta giả sử rằng các hiệu ứng quang phi tuyến là nhiễu loạn nhỏ lên đặc điểm tuyến tính mà chúng ta đã miêu tả. Mỗi số hạng trong khai triển này có thể ứng với một hiện tượng được quan sát trong quang học.[63]

1. Số hạng đầu tiên trong khai triển ứng với sự phân cực một chiều tức thời (ω =0) của vật liệu. Mối quan hệ của số hạng này với quang học không dễ thấy ngay, nhưng có một vài ứng dụng quang học quan trọng sử dụng sự phân cực này. Hỏa điện là các vật liệu thể hiện tính phân cực điện khi nhiệt độ của tinh thể thay đổi, vật liệu thể hiện hiệu ứng này có các ô đơn vị có cực, tức là ô đơn vị của tinh thể có mômen lưỡng cực toàn phần. Muối rochelle, Wurtizile, và đường mía là các vật liệu hỏa điện. Sự phân cực cảm ứng nhiệt độ là không bền mà bị trung hòa do sự di trú điện tích của bề mặt tinh thể. Do đó, sự thay đổi nhiệt độ điều khiển sự phân cực. Detector được chế tạo từ các vật liệu hỏa điện chỉ nhạy với $\frac{dT}{dt}$ và chỉ có thể đáp ứng với các bức xạ biến điệu, chopper, các dòng xung bức xạ. Để chế tạo các detector này, các điện cực được gắn vào các tinh thể hỏa điện với sự định hướng vuông góc với trục phân cực. Bức xạ đến trên bề mặt detector gây ra sự thay đổi nhiệt độ của tinh thể qua hiệu ứng hỏa điện và thay đổi sự phân cực điện tức thời. Một dòng điện được tạo ra để trung hòa sự phân cực cảm ứng nhiệt tỷ lệ với sự thay đổi nhiệt độ của tinh thể. Tinh thể hỏa điện được dùng trong quang học như một detector phát xạ dải rộng và ứng dụng thương mại của nó là trong các công tắc ánh sáng được kích hoạt bằng nhiệt. Vật liệu detector phổ biến là LiTaO3.

Sắt điện là một vật liệu hỏa điện thể hiện trật tự xa của các moomen lưỡng cực, tạo ra sự phân cực tức thời. Khi đặt vào điện trường ngoài chất sắt điện sẽ hưởng ứng khác với các chất khác do sự tồn tại của độ phân cực tự phát. Sự hưởng ứng này tạo ra đường trễ sắt điện được mô tả hay vẽ như một hàm phi tuyến tính theo điện trường $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$.

Khi đặt vào 1 điện trường ngược gọi là trường kháng điện, đến khi điện trường theo chiều ngược đủ lớn có sự bão hòa theo chiều ngược và nếu quay ngược điện trường có sự trễ tương tự. Do các đômen trong tinh thể giống

với các đômen trong vật liệu sắt từ do đó các vật liệu sắt điện cũng tương tự như các vật liệu sắt từ. Ba nhóm sắt điện chính đóng vai trò như các thành viên đầu tiên.
Sử dụng sự quay trạng thái phân cực của từng đômen riêng biệt, sự thay đổi không gian của tính lưỡng chiết của vật liệu sắt từ đã được ứng dụng vào các màn hình quang học lưu trữ vĩnh cửu.

Typical Members of Ferroelectric Classes

Name	Formula	Crystal Group
Barium titanate	$BaTiO_3$	m3m
KDP	KH_2PO_4	$\bar{4}2m$
Rochelle salt	$NaK(C_4H_4O_6)\cdot 4H_2O$	222

2. Số hạng thứ hai trong khai triển là các đáp ứng quang học tuyến tính bình thường của vật liệu
3. Số hạng thứ ba mô tả các vật liệu tích cực về mặt quang học.
4. Số hạng thứ tư tương ứng với các quá trình bậc hai được liệt kê trong bảng 15.1.

BẢNG 15.1

Tần số của các trường tới	Tần số phân cực	Quá trình
ω_1, ω_2	$\omega_1 = \omega_1 + \omega_2$	Trộn tần số tổng
ω_1	$\omega = 2\omega_1$	Sự phát sóng hài bậc II
$\omega_1, 0$	$\omega = \omega_1$	Hiệu ứng Pockels
ω_1, ω_2	$\omega_1 = \omega_1 - \omega_2$	Sự trộn tần số hiệu
ω_1	$\omega_1 = 0$	Hiệu ứng điện quang ngược, chỉnh lưu một chiều

5. Số hạng thứ 5 tương ứng với các quá trình bậc 3 được liệt kê trong bảng 15.2.
6. Số hạng thứ 6 tương ứng với các hiệu ứng từ quang. Khi $\omega_2 = 0$, số hạng miêu tả hiệu ứng Faraday.

Trong chương này, ta sẽ khảo sát ngắn gọn một số hiệu ứng quang phi tuyến và ứng dụng của chúng (để biết thêm chi tiết, bạn đọc có thể tham khảo một số sách quang phi tuyến từ 64 đến 66). Sự xây dựng lý thuyết quang phi tuyến được đưa vào chương này dựa trên lý thuyết nhiễu loạn được nêu ở phụ lục 15-A.
Sự phân cực do đáp ứng phi tuyến của các vật liệu với sóng điện từ sẽ thu được từ lý thuyết nhiễu loạn. Tính chất phi tuyến của vật liệu được đặc trưng qua một tham số được gọi là độ cảm điện môi phi tuyến. Và một hệ số liên quan là hệ số quang phi tuyến, nó sẽ hữu dụng hơn trong thực nghiệm. Vì vậy, cần phải rút ra mối quan hệ giữa hai tham số này. Tính toán về hệ số quang phi tuyến hiệu dụng của một lớp tinh thể sẽ được đưa vào phụ lục 15-C, còn các hệ số của các lớp tinh thể khác sẽ được liệt kê dưới dạng bảng. Giá trị hệ số quang phi tuyến vật liệu được tính bằng cách dùng một quy luật được thảo luận trong phụ lục 15-B.
Các phương trình maxwell được sử dụng để thu được phương trình chuyển động của một sóng chuyển động truyền trong môi trường phi tuyến dưới dạng tổng quát nhất của nó, phương trình này liên quan đến 3 sóng ứng với mỗi sóng có một tần số. Giá trị của các tần số tuân theo định luật bảo toàn năng lượng và giá trị của

các vector sóng tuân theo định luật bảo toàn động lượng. Chúng ta sẽ để ý tới các trường hợp hai tần số giống nhau và bằng ω. Sự bảo toàn năng lượng đòi hỏi tần số thứ ba phải bằng 2ω. Quá trình phi tuyến liên quan đến các sóng này được gọi là sự phát sóng hài bậc hai.

BẢNG 15.2

Tần số tới	Tần số phân cực	Quá trình
ω_1	$3\omega_1$	Sự phát sóng hài bậc III
ω_1, ω_2	$\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_2$	Hiệu ứng Raman
ω_1	$\omega = \omega_1 + \omega_1 - \omega_1$	Hiệu ứng Kerr quang học
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$	Sự trộn ba tần số
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	$\omega_3 + \omega_1 = \omega_1 + \omega_2$	Sự trộn bốn tần số
ω_1	$\omega = \omega_1$	Chiết suất phụ thuộc cường độ(sự liên hợp pha)
$\omega_1, 0$	$\omega = \omega_1$	Hiệu ứng Kerr

Ta sẽ xét một số phương pháp phù hợp để đạt được sự bảo toàn động lượng trong sự phát sóng hài bậc hai. Khi điều kiện đối xứng trong tinh thể thích hợp thì có thể xảy ra các hiệu ứng phi thuyến bậc ba. Trong các hiệu ứng quang phi tuyến bậc 3, chúng ta chỉ xét một hiệu ứng được gọi là liên hợp pha. Quá trình này được đề cập theo phương pháp chụp ảnh toàn kí và quá trình này được giải thích như là sự thu ảnh toàn kí động. Sự phân cực vĩ mô được định nghĩa trong (8-19) là:

$$P = Nex$$

Chúng ta sẽ dùng tính toán nhiễu loạn bậc nhất để tính sự dịch chuyển vị trí x của một dao động tử cưỡng bức với sự phi tuyến bậc hai được rút ra trong phụ lục 15A (15A-6). Chúng ta có thể viết độ phân cực cuối cùng là :

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}ex^1 = \mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_1 + \omega_2) + \mathrm{P}(\omega_1 - \omega_2) + \mathrm{P}(2\omega_1) + \mathrm{P}(2\omega_2) + \mathrm{P}(0) \qquad (15.1)$$

Sau này chúng ta có thể thấy các số hạng của (15.1) xuất hiện một cách riêng biệt do sự bảo toàn động lượng (trong quang phi tuyến nó được gọi là sự hợp pha), cho phép các ảnh hưởng của mỗi số hạng phân cực được xét một cách riêng biệt nên ta đưa vào một tham số mới được gọi là độ cảm điện của môi trường. Mô tả đáp ứng của môi trường đối với trường, khi đó:

$$\chi = (\varepsilon / \varepsilon_0) - 1 = n^2 - 1 \qquad (15.2)$$

Nó là hằng số tỉ lệ giữa điện trường đặt vào và sự phân cực cảm ứng

$$\mathrm{P}(\omega_i) = \chi(\omega_i)\varepsilon_0 \mathrm{E}_i \qquad (15.3)$$

Nói chung, χ là một hàm phức nhưng nếu giả sử các tần số có liên quan là cách xa tần số cộng hưởng thì có thể được xem là một hàm thực. Để tìm sự phân cực cảm ứng đối với hiệu ứng phi tuyến bậc hai, chúng ta sử dụng nhiễu loạn bậc nhất thu được từ phụ lục 15-A, hay số hạng $\chi^{(1)}(15\mathrm{A}-16)$ để viết độ cảm cho mỗi thành phần tần số.

Số hạng tần số cơ bản của độ cảm là:

$$\chi(\omega_i) = (\mathrm{N}e/(\varepsilon_0 \mathrm{E}_i)).\mathrm{X}_i \tag{15.4}$$

Chúng ta dùng(15A-17) để viết:

$$\chi^{(1)}(\omega_i) = (\mathrm{N}e^2/\varepsilon_0 m).(1/(\sqrt{(\omega_i^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega_i^2} \tag{15.5}$$

Đây là nghiệm bậc không được gọi là độ cảm tuyến tính $\chi^{(1)}(\omega)$. Nó là một số không có đơn vị và không phụ thuộc vào đơn vị của ***P*** và ***E***.

Thành phần phi tuyến bậc hai của độ cảm được định nghĩa bằng phương trình:

$$\mathrm{P}(\omega_i \pm \omega_j) = \mathrm{P}_{NL}(\omega_3) = \chi^{(2)}(\omega_i \pm \omega_j)\varepsilon_0 \mathrm{E}_i \mathrm{E}_j$$

Ở đây chúng ta biểu thị các số hạng do mô hình nhiễu loạn bậc nhất như là độ cảm phi tuyến bậc hai $\chi^{(2)}$. Ta có thể dùng (15A-18) hoặc (15A-19) để viết độ cảm tần số tổng và tần số hiệu

$$\begin{aligned}&\chi^{(2)}(\omega_i \pm \omega_j) = (\mathrm{N}e/\varepsilon_0 \mathrm{E}_i \mathrm{E}_j).\mathrm{X}_{i+j} = \\ &(\mathrm{N}e^3 a_2/\varepsilon_0 m^2)/(\sqrt{(\omega_i^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega_i^2}. \\ &.\sqrt{(\omega_j^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega_j^2}.\sqrt{\left[(\omega_i \pm \omega_j)^2-\omega_0^2\right]^2+\gamma^2(\omega_i \pm \omega_j)^2})\end{aligned} \tag{15.6}$$

Số hạng này miêu tả tương tác tham số. (Các quá trình tham số này được định nghĩa trong chương 14 khi thảo luận về hiệu ứng âm quang). Bất cứ khi nào $\omega_1 = \omega_2$, quá trình này được gọi là suy biến. Các quá trình vật lý được mô tả bằng độ cảm này được chia thành 5 nhóm riêng biệt.

1.Số hạng khuếch đại tham số được dùng để chỉ ra rằng sự chuyển đổi bậc l à từ sóng bơm ở

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

sang sóng tín hiệu và sóng mang ở ω_1 và ω_2. Nếu chúng ta đặt vật liệu tạo ra khuếch đại tham số v ào trong một buồng cộng hưởng quang học (chẳng hạn như một buồng cộng hưởng Fabry- Perot) để chuyển sang sóng tín hiệu, sóng mang hoặc cả hai thì chúng ta sẽ quan sát được sự dao động tham số.

2. Nếu năng lượng chuyển thành tần số hài ω_3 từ sóng tín hiệu hoặc sóng mang, thì quá trình này được gọi là sự tạo tần số tổng hoặc sự tạo tần số hiệu.

3. Tần số mang cường độ cao ω_2 có thể được dùng để đảo tần số tín hiệu mức thấp ω_1 sang tần số ω_3 qua quá trình chuyển đổi nâng tần số. Quá trình này giống như sự tạo tần số tổng ngoại trừ cường độ tương đối của ba sóng.

4. Đối với sự tạo tần số tổng suy biến, ở đó $\omega_1 = \omega_2$, được gọi là sự phát sóng hài bậc hai. Chúng ta có thể rút ra độ cảm cho sự tạo sóng hai bậc hai bằng cách đặt $\omega_2 = 0$ và dùng số hạng thứ nhất của phương trình (15A-20) trong phương trình giống với (15-4). Chúng ta thu được thành phần độ cảm của sóng hài bậc hai

$$(\mathrm{N}e^3 a_2/2\varepsilon_0 m^2)/(\left[(\omega_1-\omega_0)^2+\gamma^2\omega_1^2\right]\sqrt{(4\omega_1^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2 4\omega_1^2}) \tag{15.7}$$

Nếu chúng ta định nghĩa $\chi^{(2)}(2\omega)$ là độ cảm suy biến được dùng trong công thức (15-6), thì công thức (15-7) bằng

$$\chi^{(2)}(2\omega)/2$$

Thừa số 2 xuất hiện do trong công thức (15-7), chỉ có một sóng cơ bản được đưa vào trong khi trong công thức

(15-6), thì có hai sóng cơ bản. $\chi^{(2)}(2\omega)$ có đơn vị là nghịch đảo của cường độ điện trường (trong hệ đơn vị MKS là m/V).

BẢNG 15.3 Một số độ cảm phi tuyến sóng hài bậc 2

Material	Class	Element	$\chi^{(2)}$, 10^{-12} m/V	λ, μm
Te	32	111	1.0×10^4	10.6
$LiNbO_3$	3m	222	6.14	1.06
		322	−11.6	
$BaTiO_3$	4mm	131	−34.4	1.06
		311	−36	
		333	−13.2	
KDP	$\bar{4}$2m	123	0.98	1.06
		312	0.94	
$LiIO_3$	6	331	−11.2	1.06
		333	−8.4	
CdSe	6mm	131	62	10.6
		311	57	
		333	109	
GaAs	$\bar{4}$3m	123	377	10.6

5. Sự chỉnh lưu quang học liên quan đến thành phần tần số không của độ cảm, thu được bằng cách dùng (15A-21). Sự chỉnh lưu quang học có thể được xem như là một trường hợp đặc biệt của sự tạo tần số hiệu, trong đó sự chênh lệch tần số bằng không. Nó liên quan đến hiệu ứng Pockels và có thể được xem như là hiệu ứng Pockels ngược.

Độ cảm phi tuyến có thể được tăng cường khi hoạt động gần tần số cộng hưởng sao cho $\omega_i^2 - \omega_0^2 \sim 0$. Cần chú ý rằng χ trong công thức (15-6) không chỉ là một hàm của các tần số được đặt vào mà còn là một hàm của tần số được tạo ra . Điều này có nghĩa là $\chi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ có thể được tăng cường không chỉ khi ω_1 hoặc ω_2 gần cộng hưởng hấp thụ, mà còn khi ω_3 gần tần số hấp thụ.

Các đơn vị thường được dùng trong các tài liệu là cgs (Gaussian). Để chuyển từ đơn vị cgs sang đơn vị mks chúng ta dựa vào những dữ kiện của độ phân cực cho bởi công thức

$$P(cgs)=Nex \Leftrightarrow \frac{1}{cm^3}.\text{startC.cm}= \frac{m^3}{10^6 cm^3}\,\frac{3\times10^9 \text{startC}}{C}\,\frac{10^2 cm}{m} \Leftrightarrow P(mks)$$

$$P(cgs) = (3\times10^5)\, P(mks) \qquad (15\text{-}8)$$

Từ phụ lục 2-B, cho chúng ta mối quan hệ giữa điện trường trong hệ đơn vị cgs và hệ đơn vị mks và cho ta công thức (15-9)

$$\chi^{(n)}(mks) = \frac{\chi^{(n)}(csk)}{\epsilon_0(3\times10^4)^n(3\times10^5)} = \frac{4\pi}{(3\times10^4)^{n-1}}\chi^{(n)}(cgs) \qquad (15\text{-}9)$$

Một số độ cảm phi tuyến sóng hài bậc 2 được liệt kê trong bảng 15.3.

HỆ SỐ QUANG PHI TUYẾN

χ là đại lượng được tính toán bởi các nhà lý thuyết, nhưng các nhà thực nghiệm đo được hệ số quang phi tuyến d và được định nghĩa là:

$$P(2\omega) = d(2\omega)E^2 \cos(2\omega t - 2kx) \qquad (15\text{-}10)$$

BẢNG 15.4 Hệ số phi tuyến tương đối

Material	λ, μm	n_0	n_e	d, ref. KDP	M, ×10^{-46}
Te	5.3	4.86	6.3		2835
	10.6	4.8	6.25	d_{11} = 1298	
ADP	0.265	1.59	1.54		0.08
	0.53	1.53	1.48		1.14
	1.06	1.51	1.47	d_{36} = 1.21	
$LiNbO_3$	0.53	2.33	2.23		3.03
	1.06	2.24	2.16	d_{15} = 12.5	
$AgGaSe_2$	5.3	2.61	2.58		8.58
	10.6	2.59	2.56	d_{36} = 76	
$ZnGeP_2$	5.3	3.11	3.15		146
	10.6	3.07	3.11	d_{36} = 173	
$CdGeAs_2$	5.3	3.53	3.62		810
	10.6	3.50	3.59	d_{36} = 472	

Tính toán công thức (15-7) và (15-10) sẽ cho mối quan hệ giữa hệ số quang phi tuyến với độ cảm

$$\mathbf{d}(2\omega) = \frac{\dfrac{Ne^3 a_2}{2m^2}}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 4\omega^2}} \qquad (15\text{-}11)$$

Hoặc $2d(2\omega) = \chi^{(2)}(2\omega)$

Chúng ta có thể viết lại *d* theo độ cảm tuyến tính ở sóng ánh sáng cơ bản và sóng hài bậc hai được cho bởi công thức (15-5)

$$d(2\omega) = \frac{a_2 m \epsilon_0^3}{2N^2e^3}[\chi^{(1)}(\omega)]^2\chi^{(1)}(2\omega) \qquad (15\text{-}12)$$

Dùng định nghĩa của χ được cho bởi công thức (15-2), ta thấy rằng công thức (15-12) phát biểu rằng vật liệu với chiết suất cao cũng sẽ có hệ số quang phi tuyến cao (xem bảng 15.4). Theo kinh nghiệm, người ta thấy rằng tỷ số của d trên hai độ cảm gần bằng một hằng số với nhiều vật liệu. Quy luật này được gọi là định lý Miller, được thảo luận trong phụ lục 15-B.

Mối quan hệ giữa các hệ số quang phi tuyến ở trong hệ đơn vị cgs và mks thu được từ công thức (15-9)

$$d_{mks}(2\omega) = (3.7 \times 10^{-15})d_{cgs}(2\omega) \qquad (15\text{-}13)$$

Chúng ta đã xét các tham số χ và d như các đại lượng vô hướng, nhưng trong thực tế chúng là các tensor hạng III, vì chúng thiết lập mối quan hệ giữa hai véc tơ với một vector thứ 3. Chẳng hạn độ phân cực dọc theo hướng x gắn với sóng có tần số ω_3, có quan hệ với trường điện ở tần số ω_1 và ω_2 qua phương trình

$$P_x(\omega_3) = d_{xxx}(\omega_3)E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) + d_{xyy}(\omega_3)E_y(\omega_1)E_y(\omega_2)$$

$$+ d_{xzz}(\omega_3)E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) + d_{xzy}(\omega_3)E_z(\omega_1)E_y(\omega_2)$$
$$+ d_{xyz}(\omega_3)E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + d_{xzx}(\omega_3)E_z(\omega_1)E_x(\omega_2)$$
$$+ d_{xxz}(\omega_3)E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) + d_{xxy}(\omega_3)E_x(\omega_1)E_y(\omega_2)$$
$$+ d_{xyx}(\omega_3)E_y(\omega_1)E_x(\omega_2)$$

Nói chung, tensor hạng III có 27 thành phần, nhưng số các đối số đối xứng có thể được rút về số các số hạng khác không trong tensors ứng với từng tương tác phi tuyến cụ thể.

Môi trường không dẫn (môi trường không mất mát)

Trong môi trường không dẫn, chúng ta có thể dùng các số đối số như trong chương 13 để chứng minh rằng thứ tự viết E_j và E_k là không quan trọng và

$$d_{ijk} = d_{ikj}$$

đối với tất cả các sự kết hợp của i, j, và k; các tần số phải hoán vị với các tọa độ để cho đẳng thức này đúng. Đẳng thức này cho phép sự chuyển vị của hai chỉ số cuối cùng của d và χ với một, như được thực hiện đối với các hệ số điện quang [xem phụ lục 14-A (14A-1) để thu được quy luật được dùng trong hoán vị]. Dưới dạng ma trận, độ phân cực được viết là:

$$\begin{bmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_z(\omega_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_y(\omega_2) + E_y(\omega_1)E_x(\omega_2) \end{bmatrix} \quad (15\text{-}14)$$

Sự đối xứng tinh thể.

Sự đối xứng tinh thể xác định các số hạng khác không d_{jjk} của tensor; chẳng hạn nếu tinh thể có đối xứng đảo tất cả các d_{ijk} bằng không, và giảm đi tổng số nhóm điểm từ 32 nhóm điểm đến 20 nhóm điểm. Ứng dụng của các đối số đối xứng thu được một tensor với các số hạng khác không tương tự như các tensor trong hiệu ứng áp điện và hiệu ứng Pockels (xem phụ lục 14-A).

Môi trường không tán sắc.

Tensor hệ số quang phi tuyến có thêm tính đối xứng và được đơn giản hơn nữa nếu sự tán sắc trong vật liệu có thể được bỏ qua. Nếu sự phân cực phi tuyến chỉ do sự chuyển động của điện tích và không có cộng hưởng hấp thụ trong vùng phổ chứa ω_1 ,ω_2 và ω_3 , sự tán sắc do phi tuyến có thể được bỏ qua và tất cả các tần số đóng vai trò tương đương nhau. Khi các điều kiện của sự tán sắc có thể được bỏ qua, tất cả các yếu tố d_{ijk} của tensors hệ số quang phi tuyến được hình thành bằng cách hoán vị i, j, bằng nhau, được gọi là điều kiện đối xứng Kleinman.[67]

BẢNG 15.5 Hệ số quang phi tuyến hiệu dụng

Class	2 e-rays, 1 o-ray	2 o-rays, 1 e-ray
6	0	$d_{15}\sin\theta$
4	0	$d_{15}\sin\theta$
6mm	0	$d_{15}\sin\theta$
4mm	0	$d_{15}\sin\theta$
622	0	0
644	0	0
$\bar{6}$m2	$d_{22}\cos^2\theta\cos 3\phi$	$-d_{22}\cos\theta\sin 3\phi$
3m	$d_{22}\cos^2\theta\cos 3\phi$	$d_{15}\sin\theta - d_{22}\cos\theta\sin 3\phi$
$\bar{6}$	$(d_{11}\sin 3\phi + d_{22}\cos 3\phi)\cos^2\theta$	$(d_{11}\cos 3\phi - d_{22}\sin 3\phi)\cos\theta$
3	$(d_{11}\sin 3\phi + d_{22}\cos 3\phi)\cos^2\theta$	$d_{15}\sin\theta + (d_{11}\cos 3\phi - d_{22}\sin 3\phi)\cos\theta$
32	$d_{11}\cos^2\theta\sin 3\phi$	$d_{11}\cos\theta\cos 3\phi$
$\bar{4}$	$(d_{14}\cos 2\phi - d_{15}\sin 2\phi)\sin 2\theta$	$-(d_{14}\sin 2\phi + d_{15}\cos 2\phi)\sin\theta$
$\bar{4}$2m	$d_{14}\sin 2\theta\cos 2\phi$	$-d_{14}\sin\theta\sin 2\phi$

Chúng ta sẽ đơn giản tất cả hơn nữa bằng cách thay tensor hệ số quang phi tuyến bằng tham số vô hướng được gọi là *d* hiệu dụng, d_{eff}. Các phương trình mà chúng ta rút ra bằng cách dùng d hiệu dụng có thể được phục hồi cho kết quả ba chiều bằng cách chèn các phương trình thích hợp của d_{eff} . Khi tính toán d_{eff} , giả sử rằng hai sóng phân cực tuyến tính tới tinh thể lưỡng chiết. Phương trình của d_{eff} phụ thuộc vào lớp tinh thể, sự phân cực của sóng và hướng vecstor sóng đối với trục quang học. Một ví dụ về tính toán d_{eff} được minh họa trong phụ lục 15-C, cùng với các hệ thức hình học của θ và ϕ. Bảng 15.5 biểu thị d_{eff} đối với các vật liệu có đối xứng Kleinman; một danh sách hoàn chỉnh hơn nữa có thể được tìm thấy trong sách viết bởi Zemike và Midwinter.[64]

SỰ LAN TRUYỀN SÓNG TRONG MÔI TRƯỜNG PHI TUYẾN

Hệ số quang phi tuyến hiệu dụng dẫn đến sự phân cực phi tuyến hiệu dụng; xem phụ lục 14-C. Sự phân cực phi tuyến hiệu dụng này sẽ được dùng để rút ra các phương trình bức xạ điện từ được tạo bởi tương tác phi tuyến. Điểm khởi đầu của các tính toán này là các phương trình Maxwell. Các hệ thức cơ bản từ chương 2 được điều chỉnh để sử dụng cho sự phân cực phi tuyến.

$$\begin{aligned} B &= \mu H,\ J = \sigma E \\ D &= \varepsilon_0 E + P \\ &= \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi E + P_{NL} \end{aligned} \tag{15-15}$$

Chúng ta sẽ giả sử môi trường là đồng nhất và phi từ tính , cho phép các tham số χ , σ và μ được xem như không đổi đối với toán tử ∇. Bây giờ chúng ta có thể dùng các phương trình Maxwell để xây dựng phương trình sóng theo cách tương tự như chúng ta đã làm trong chương 2.

Đạo hàm theo thời gian của (2-3) và (2-4) là :

$$\begin{aligned} \nabla\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\mu\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ \nabla\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \epsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{15-16}$$

Và rot của những phương trình tương tự là:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\nabla\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} = \epsilon_0(1+\chi)\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\nabla\times\mathbf{E} \qquad (15\text{-}17)$$

Kết hợp (15-16) và (15-17), chúng ta thu được:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \mu\epsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} = 0 \qquad (15\text{-}18)$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} + \mu\epsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

Chúng ta không quan tâm đến phương trình liên quan đến trường từ H vì vậy chúng ta đơn giản hóa (15-18), dùng đồng nhất thức vector (2A-12). Kết quả của việc tính toán các phương trình Maxwell là phương trình sóng đối với môi trường phi tuyến:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2\mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \qquad (15\text{-}19)$$

Để giải thích ý nghĩa vật lý của phương trình sóng phi tuyến, chúng ta sẽ xét bài toán một chiều của ba sóng phẳng có tần số ω_1, ω_2, và ω_3 truyền theo hướng dương của trục z. Điện trường **E** của ba sóng phẳng có dạng :

$$\mathbf{E}(\omega_i) = E_i = \tfrac{1}{2}\left[E_i(z)e^{i(\omega_i t - k_i z)} + E_i^*(z)e^{-i(\omega_i t - k_i z)}\right] \qquad (15\text{-}20)$$

(chỉ số dưới được dùng trong phương trình này được dùng để chỉ các tần số liên quan tới sóng chứ không phải là các tọa độ Đề Các).

Bằng cách thế ba sóng phẳng này vào phương trình sóng, chúng ta sẽ khám phá ra các tính chất của sóng khi chúng là nghiệm của phương trình sóng phi tuyến. Vế trái của phương trình (15-19) được tính toán dùng giả thiết rằng sự thay đổi theo z của biên độ phức của sóng ánh sáng nhỏ tức là:

$$k_i\frac{\delta E_i}{\delta z} >> \frac{\delta^2 E_i}{\delta z^2}$$

do đó vế trái của (15-19) sẽ trở thành:

$$\nabla^2 E_i = \frac{-1}{2}\left(k_i^2 E_i + 2ik_i\frac{\delta E_i}{\delta z}\right)\exp[i(\omega_i t - k_i z)] + c.c$$

[chúng ta đang dùng các kí hiệu được đưa vào bởi (1B-6) và c.c chỉ liên hợp phức

$c.c = \frac{-1}{2}\left(k_i^2 E_i - 2ik_i\frac{\delta E_i}{\delta z}\right)\exp[-i(\omega_i t - k_i z)]$ của số hạng đầu tiên].

Đạo hàm theo thời gian của điện trường có thể viết lại bằng cách dùng (1-22). Số hạng duy nhất của (15-19), chưa được tính trước đây liên quan đến P_{NL}. Định nghĩa về hệ số quang phi tuyến của (15-10) có thể được tổng quát hóa thành hệ thức sau đây đối với phân cực phi tuyến do ba sóng:

$$P_{NL} = P_{NL}(\omega_1) + P_{NL}(\omega_2) + P_{NL}(\omega_3)$$
$$= d[E^*(\omega_2)E(\omega_3) + E^*(\omega_1)E(\omega_3) + E^*(\omega_1)E(\omega_2)]$$

Nếu chúng ta dùng $P_{NL}(\omega_1)$ như một ví dụ, đạo hàm bậc hai theo thời gian là:

$$\frac{\partial^2 P_{NL}(\omega_1)}{\partial t^2} = -(\omega_3 - \omega_2)^2 \mathrm{d} E_2^* E_3 \exp\left\{-i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]\right\} + \text{c.c.} \tag{15-21}$$

Nghiệm của phương trình sóng đối với ba sóng phẳng sẽ hoàn toàn dễ nếu chúng ta có thể xét mỗi thành phần sóng một cách riêng biệt, nhưng P_{NL} liên quan đến sự kết hợp tần số $\omega_1 + \omega_2$, ω_3-ω_2 và ω_3-ω_1 . Điều này ngăn cản sự đơn giản hóa phương trình nếu không

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$$

Khi điều này đúng chúng ta có thể tách phương trình sóng thành ba phương trình biên độ ghép.
Phương trình ghép đối với $\boldsymbol{E_1}$ là:

$$-\frac{1}{2}\left(k_1^2 E_1 + 2ik_1 \frac{\partial E_1}{\partial z}\right) e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + \text{c.c.} =$$

$$(i\omega_1 \mu\sigma_1 - \omega_1^2 \mu\epsilon_1)\frac{E_1}{2} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + \text{c.c.} \tag{15-22}$$

$$-\left\{\frac{\omega_1^2 \mu \mathrm{d}}{2} E_3 E_2^* \exp\left\{i[\omega_1 t - (k_3 - k_2)z]\right\} + \text{c.c.}\right\}$$

ở đây chúng ta đã đặt tên ε và σ theo tên của tần số trong trường hợp tán sắc đóng vai trò quan trọng. Nếu chúng ta nhân cả hai vế của (15-22) với sóng phẳng

$$\frac{\exp\left[-i(\omega_1 t - k_1 z - \frac{\pi}{2})\right]}{k} = \frac{i}{k} \exp\left[-i(\omega_1 t - k_1 z)\right]$$

Và dùng hệ thức

$$k_1^2 = \omega_1^2 \mu \epsilon_1$$

Chúng ta có thể đơn giản hóa phương trình. Thực hiện các phép toán tương tự cho cả ba phương trình chúng ta thu được:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{\sigma_1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} E_1 - \frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} \mathrm{d} E_3 E_2^* \exp\left[-i(k_3 - k_2 - k_1)z\right] \tag{15-23}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -\frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} E_2 - \frac{i\omega_2}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \mathrm{d} E_3 E_1^* \exp\left[-i(k_3 - k_2 - k_1)z\right] \tag{15-24}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{\sigma_3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_3}} E_3 - \frac{i\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_3}} \mathrm{d} E_1 E_2 \exp\left[-i(k_1 + k_2 - k_3)z\right] \tag{15-25}$$

Phương trình (15-23) đến (15-25) cho chúng ta biết tốc độ thay đổi theo khoảng cách của biên độ sóng ở một tần số như một hàm theo biên độ sóng tại hai tần số còn lại. Các phương trình được ghép qua hệ số quang phi tuyến d có thể giải được nhưng các nghiệm có liên quan đến các tích phân elip.[68] Chúng ta có thể thu được các thông tin về tương tác thuận từ phi tuyến mà không cần tìm các nghiệm hoàn chỉnh của các phương trình này. Các tần số được phép phải thõa mãn điều kiện:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

Có sự chênh lệch về pha giữa các sóng ở tần số ω_3 và các sóng ở tần số ω_1 và ω_2:

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$$

Sự chênh lệch về pha này làm cho biên độ của mỗi sóng thay đổi theo kiểu hình sin khác nhau khi sóng truyền dọc theo hướng *z*. Số hạng liên quan đến σ, độ dẫn điện của môi trường bằng với sự mất mát hấp thụ có thể xảy ra khi sóng truyền theo hướng z.

Tương tác phi tuyến có thể được làm rõ trong các thảo luận về âm quang trong chương 14, như một quá trình tán xạ. Điều kiện $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ là phát biểu về bảo toàn năng lượng. Sự chênh lệch pha Δk cho thấy sự thay đổi động lượng trong quá trình tán xạ. Nếu quá trình tán xạ là đàn hồi thì $\Delta k = 0$, động lượng được bảo toàn. Nếu quá trình tán xạ không đàn hồi thì $\Delta k \# 0$. Trong hai phần tiếp theo chúng ta sẽ xét tác động của hai định luật bảo toàn đến các quá trình quang phi tuyến.[69]

Bảo toàn năng lượng: trong phần này, chúng ta sẽ giả sử $\Delta k = 0$ và vật liệu là chất hoàn toàn cách điện để cho $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Dùng những giả thiết này và nhân (15-23) tới (15-25) với E_i^* chúng ta thu được công thức

$$E_1^* \frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{id}{2} E_1^* E_2^* E_3 \,\omega_1 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} \qquad (15\text{-}26)$$

$$E_2^* \frac{\partial E_2}{\partial z} = -\frac{id}{2} E_1^* E_2^* E_3 \,\omega_2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \qquad (15\text{-}27)$$

$$E_3^* \frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{id}{2} E_1 E_2 E_3^* \,\omega_3 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_3}} \qquad (15\text{-}28)$$

Nếu chúng ta dùng dữ kiện

$$\frac{\partial}{\partial z}(E_i E_i^*) = E_i \frac{\partial E_i^*}{\partial z} + E_i^* \frac{\partial E_i}{\partial z}$$

Chúng ta thấy rằng (15-26) đến (15-28) dẫn đến đồng nhất thức

$$\frac{1}{\omega_1}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_1 E_1^*) = \frac{1}{\omega_2}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_2 E_2^*) = -\frac{1}{\omega_3}\sqrt{\frac{\epsilon_3}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_3 E_3^*) \qquad (15\text{-}29)$$

Định nghĩa về vector Poynting trung bình (2-26) có thể dùng để viết lại (15-29) như là một định luật bảo toàn năng lượng. Ta khám phá ra điều kiện $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ dẫn đến một định luật bảo toàn năng lượng mà không phải chỉ ra loại tương tác.

Hệ thức Manley-Rowe

Định luật bảo toàn năng lượng (15-29)

$$\frac{(\text{Su thay doi cong suat o } \omega_1)}{\omega_1} = \frac{(\text{Su thay doi cong suat o } \omega_2)}{\omega_2}$$

$$= \frac{(\text{su thay doi cong suat o } \omega_3)}{\omega_3}$$

được gọi là hệ thức Manley-Rowe và đúng cho tất cả các quá trình phát tần số tổng và tần số hiệu (sự trộn sóng). Phát biểu bằng lời là nếu sóng ở tần số ω_1 và ω_2 được dùng để tạo ra một sóng ở tần số ω_3 thì các sóng ở tần số ω_1 và ω_2 sẽ mất năng lượng bằng năng lượng mà sóng ở tần số ω_3 thu được.

Bây giờ chúng ta sẽ trở lại công thức (15-25) và tìm ra dạng gần đúng của sự biến thiên của sóng ánh sáng E_3 tại tần số ω_3 bằng cách giả sử.

1. $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

2. σ =0, là độ dẫn điện, trong trường hợp này là môi trường không dẫn.
3. Các vật liệu phi tuyến chiếm một nửa mặt phẳng dương bên phải của $z = 0$, biên của vật liệu phi tuyến
4. $E_3 = 0$ tại $z \leq 0$, nghĩa là, bên ngoài của vật liệu phi tuyến chỉ có các sóng E_1 và E_2 tồn tại.
5. E_1 và E_2 không đổi theo hướng z, tức là chỉ có một phần năng lượng rất nhỏ được chuyển từ biên độ E_1 và E_2 sang biên độ E_3.
Với các giả thiết này, chúng ta lấy tích phân công thức (15-25) để tìm biên độ trường ở khoảng cách $z = L$ trong môi trường phi tuyến

$$E_3 = -\frac{i\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in_3}}\, d\int_0^L E_1E_2e^{i\Delta kz}dz = -\frac{\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in_3}}\;\frac{dE_1E_2}{\Delta k}(e^{i\Delta kz}-1) \tag{15-30}$$

Chúng ta sử dụng các kết quả của tích phân này để tính toán vector Poynting cho sóng ở tần số ω_3. Vector Poynting sẽ cho ta thấy sự khác nhau về pha Δk và cho một ý nghĩa vật lý về ảnh hưởng của nó đến dòng chảy năng lượng. Thêm vào đó, hệ số phẩm chất để đánh giá các vật liệu phi tuyến cũng được xem xét.

Vector Poynting

Nếu chúng ta sử dụng giá trị của E_3 từ phương trình (15-30) để tính toán vector Poynting của sóng ở tần số ω_3, ta sẽ thu được năng lượng ứng với mỗi đơn vị diện tích, chảy qua mặt phẳng tại $z = L$ trong môi trường phi tuyến là:

$$S_3 = \frac{n_3}{2c\mu}\left(\frac{\omega_3^2\mu}{4\in_3}\frac{d^2}{\Delta k^2}E_1^2E_2^2\right)\left[\left(e^{i\Delta kL}-1\right)\left(e^{-i\Delta kL}-1\right)\right] \tag{15-31}$$

Chúng ta có thể sử dụng ba hệ thức

$$\frac{1}{\in_3}\frac{\in_0}{\in_0} = \frac{1}{n_3^2\in_0}, \qquad E_i^2 = \frac{2\mu c}{n_i}S_i, \qquad \frac{\mu^2 c}{\in_0} \approx \sqrt{\left(\frac{\mu}{\in_0}\right)^3}$$

để đơn giản hóa công thức (15-31)

$$S_3 = \frac{\omega_3^2}{2n_1n_2n_3}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\in_0}\right)^3}\frac{d^2L^2S_1S_2}{(\Delta kL)^2}\left(\left[2-e^{-i\Delta kL}-e^{i\Delta kL}\right]\right)$$

Số hạng trong dấu ngoặc đơn có thể thay bằng bằng

$$4\sin^2(\Delta kL/2)$$

Ta thu được năng lượng của sóng được tạo ra trong quá trình quang phi tyến ở tần số ω_3

$$S_3 = \frac{\omega_3^2}{2n_1n_2n_3}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\in_0}\right)^3}d^2L^2S_1S_2\left[\frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2}\right] \tag{15-32}$$

Giá trị tức thời của (15-32) có đơn vị là J/m^2 và giá trị trung bình có đơn vị là W/m^2.
Ý nghĩa vật lý của sự chênh lệch vector sóng Δk của ba sóng có thể thấy được bằng cách xét công thức (15-32).
1.Khi $\Delta k = 0$, công suất ra của các sóng có tần số ω_3 tỷ lệ với tích công suất vào của các sóng ở tần số ω_1 và ω_2. Công suất ra cũng tỷ lệ thuận với bình phương chiều dài lan truyền trong môi trường phi tuyến.
2. Hệ số phẩm chất. Năng lượng của sóng phi tuyến được tạo ra tỉ lệ với

$$S_3 \propto \frac{d^2}{n_1 n_2 n_3}$$

Chúng ta có thể sử dụng tỷ số này như là một hệ số phẩm chất cho các vật liệu phi tuyến (xem Bảng (15.4))

$$M = \frac{d^2}{n^3}$$

Nguyên lý Miller trong Phụ lục 15-B, cũng cho thấy rằng tỷ số (d / n) là hệ số phẩm chất thích hợp. Điều này là do một vật liệu với một hệ số phi tuyến lớn cũng sẽ có chiết suất lớn theo nguy ên lý Miller. Bằng cách chia d cho n, ta loại bỏ được trọng số của hệ số quang phi tuyến bằng chiết suất.

3. Chiều dài kết hợp. Khi $\Delta k \neq 0$, Công suất đầu ra biến đổi theo

$\sin c^2(\Delta kL/2)$

Năng lượng S_3 của sóng phi tuyến được tạo ra đạt cực đại tại:

$$L = \frac{\pi}{2\Delta k}$$

Kết quả này tìm được bằng cách lấy đạo hàm (15-32) theo L và cho nó bằng không. Ta định nghĩa khoảng cách này là chiều dài kết hợp:

$$\ell_c = \frac{\pi}{2\Delta k} \tag{15-33}$$

Trong sự tạo sóng hài bậc hai, nó bằng chiều dài hiệu dụng của vật liệu phi tuyến trong sự phát bức xạ hài bậc hai. Kích thước của nó có thể được tính bằng cách sử dụng các thông số liên quan đến sự phát sóng hài bậc hai

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \omega_3 = 2\omega_1$$

$$k_1 = k_2 = \frac{n_1\omega_1}{c}, \qquad k_3 = \frac{n_3\omega_3}{c} = 2\frac{n_3\omega_1}{c}$$

Cần lưu ý rằng

$k_3 \neq 2k_1$ vì tán sắc

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = \frac{2\omega_1}{c}(n_3 - n_1)$$

Do đó chiều dài kết hợp trong sự tạo sóng hài bậc hai là

$$\ell_c = \frac{\lambda_1}{4(n_3 - n_1)} \tag{15-34}$$

ở đây λ_1 là bước sóng trong chân không của tần số cơ bản.

Bây giờ, chúng ta có thể sử dụng một số tham số thực để tìm ra chiều dài kết hợp điển hình. Chúng ta sẽ nhân đôi bước sóng hồng ngoại 1 μm thành bước sóng nhìn thấy 500 nm và sẽ sử dụng KDP làm vật liệu phi tuyến. Đối với KDP (chúng ta sẽ sử dụng các giá trị cho tia thường),

$$\lambda_1 = 10^{-6}\,m, \qquad n_1 = 1.50873$$

$$\lambda_3 = 5\times10^{-7}\,m, \quad n_3 = 1.529833$$

Chiều dài kết hợp là 1,18 x 10^{-5} m. Giá trị này bằng với chiều dài tinh thể có ích cực đại để tạo ra công suất sóng hài bậc hai khi $\Delta k \neq 0$.

4. Chiều dài kết hợp của sự phát sóng hài bậc hai được biểu diễn trong bảng 15.6 khá nhỏ. Để cho sự phát sóng hài bậc hai là hữu dụng thì cần phải thu được chiều dài kết hợp lớn hơn. Điều này dẫn đến vấn đề là làm sao để thu ngắn sự chênh lệch giữa n_1 và n_3 để tạo ra chiều

dài kết hợp có ích. Để tạo ra chiều dài kết hợp khoảng *1 mm* cho sự phát sóng hài bậc hai dùng 1 μm, công thức (15-34) cho ta thấy các chiết suất tương ứng với bước sóng cơ bản phải bằng

TABLE 15.6 Second Harmonic Coherence Length

Crystal	λ	ℓ_c, exp.	ℓ_c, calc.
KDP	0.694 μm	18.5 μm	18.8 μm
KD*P	0.694	20.6	
ADP	0.694	17.7	18.2
KDP	1.06	22.0	22.0
KD*P	1.06	21.2	
ADP	1.06	21.	20.6
$BaTiO_3$	1.06	5.8	

$$n_1 = n_3 \pm 0.00025$$

Chiều dài kết hợp ngắn được liệt kê trong Bảng (15.6) cho thấy rằng cần phải giữ cho $\Delta k \approx 0$ nếu các tính chất phi tuyến của vật liệu được dùng để tạo ra bước sóng mới. Trong quang phi tuyến, quá trình rút ngắn chênh lệch pha Δk được gọi là sự hợp pha. Nếu chúng ta xem sự tạo sóng hài bậc hai như một quá tán xạ, sự hợp pha tương đương với phát biểu rằng động lượng được bảo toàn.

Sự hợp pha

Chúng ta sẽ hình dung vấn đề hợp pha bằng cách theo dõi hai sóng truyền dọc theo một mảng tuyến tính tám nguyên tử. Chúng ta giả sử rằng chiết suất đối với vật liệu ở tần số cơ bản ω_1 là n_1 và chiết suất của sóng hài ω_3 là $n_3 = \{16/9\} n_1$. Để làm cho sự hình dung được dễ dàng, ta giả sử rằng λ_1 bằng với khoảng cách nguyên tử. Điều này cũng có nghĩa λ_3 bằng 8/9 khoảng cách giữa các nguyên tử. Độ không hợp pha giữa hai sóng này khi chúng truyền dọc theo hàng các nguyên tử là

$$k_3 - k_1 = \frac{\pi n_1}{4\lambda_1}$$

Sóng cơ bản ở tần số ω_1 cảm ứng sự phân cực phi tuyến trễ phía sau sóng cơ bản một góc $\pi/4$. Sự phân cực này tạo ra một sóng hài ở tần số ω_3. Khi chúng ta di chuyển từ nguyên tử này sang nguyên tử khác, chúng ta cộng thêm sóng hài được tạo ra bởi sự phân cực, ở tần số ω_3 của sóng cơ bản ở tần số ω_1 dùng phương pháp vector được giới thiệu trong chương 4, xem hình 4-1. Tổng của hai sóng sẽ bằng với trường cục bộ mà nguyên tử phải chịu và điều này sẽ xác định sự phân cực cảm ứng.

Tại nguyên tử 1, lúc này sóng chỉ là sóng cơ bản, chúng ta đặt tên điện trường của nó là **F** ở hình 15-la. Tại nguyên tử 2, sóng cơ bản F có sự tham gia của sóng hài **H** được hình thành bởi sự phân cực cảm ứng trong nguyên tử 1. Sóng hài trễ so với sóng cơ bản **F** một góc bằng 45 °, được miêu tả trong hình 15-la. Tổng hợp hai sóng **H** và **F** bằng trường có biên độ **R**. Trường tổng hợp này cảm ứng sự phân cực trong nguyên tử 2 tạo ra một sóng hài ở nguyên tử 3, và tiếp tục lệch thêm 1 góc $\pi/4$ với sự phân cực cảm ứng; xem Hình 15-1 b. Khi các sóng di chuyển qua tinh thể, chúng tới nguyên tử 4, ở đó tổng hợp của **H** và **F** đạt giá trị cực đại của nó (xem hình 15-lc). Sự phân cực được cảm ứng bởi sóng này đạt cực đại ở nguyên tử 5. Cuối cùng chúng đến nguyên tử 8, sự phân cực cảm ứng do tổng hợp, được hình thành bằng cách cộng **F** cơ bản và **H** sóng hài bằng không. Nguyên tử 8 không thấy trường và do đó không tạo ra sóng hài bậc hai. Phép phân tích hình học này phù hợp với tính toán chiều dài gắn kết hợp bằng cách sử dụng (15-33) và chứng tỏ rằng chiều dài kết hợp là một thước đo mà khoảng cách trên đó sóng hài và sóng cơ bản truyền cùng pha qua môi trường phi tuyến.

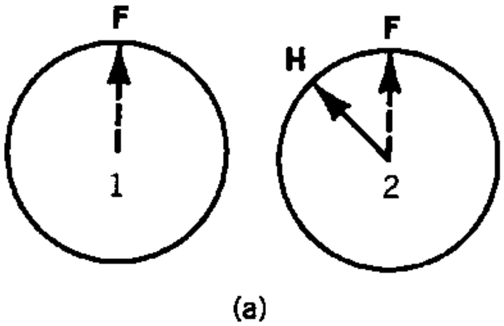


FIGURE 15-1a. The first two atoms in a nonlinear material are located at position 1 and 2. The electric field of the fundamental wave is denoted by **F**. It has the same phase at each atom. The polarization, induced by **F** in atom **1**, generates a harmonic wave **H** at atom 2.

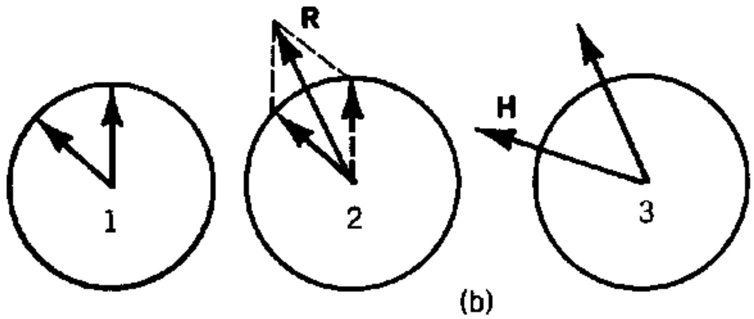


FIGURE 15-1*b*. Propagation of the harmonic wave along the chain of atoms.

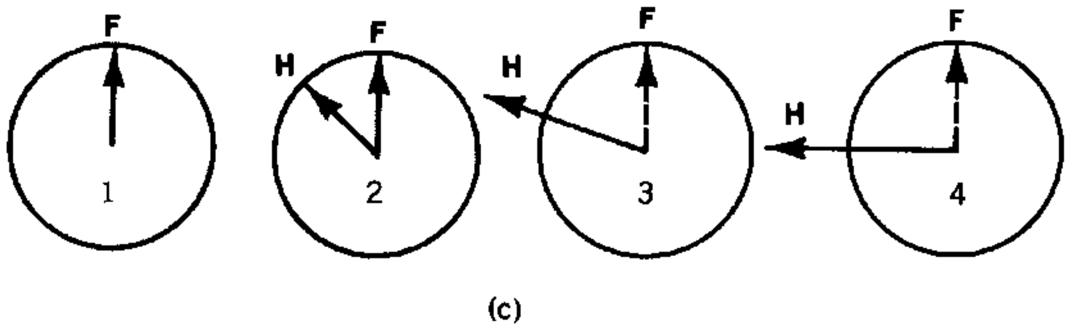


FIGURE 15-1*c*. Four atoms in a nonlinear material. The fundamental and harmonic waves have reached atoms 3 and 4. Atoms 1 and 2 from Figure 15-1*a* are shown for reference.

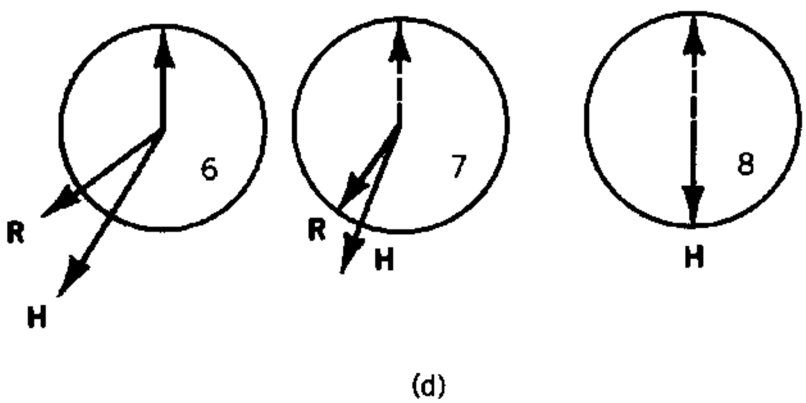


FIGURE 15-1*d*. The fundamental and harmonic waves in the nonlinear crystal have reached atom 8. The harmonic wave is completely out of phase with the fundamental so that the resultant field is zero. The polarization induced in atom 8 is therefore zero.

Hình 15-la. *Hai nguyên tử đầu tiên của vật liệu phi tuyến được đặt ở các vị trí 1 và 2. Điện trường của sóng cơ bản được kí hiệu là F. Nó có cùng pha ở mỗi nguyên tử. Sự phân cực được cảm ứng bởi F trong nguyên tử 1, tạo ra sóng hài H tại nguyên tử 2.*

Hình 15-16b. *Sự truyền của sóng hài dọc theo chuỗi các nguyên tử.*

Hình 15-1c. *Bốn nguyên tử trong vật liệu phi tuyến. Các sóng cơ bản và hài đến các nguyên tử 3 và 4. Các nguyên tử 1 và 2 từ hình 15-la được biểu diễn để tham khảo.*

Hình 15-1d. *Các sóng cơ bản và sóng hài trong tinh thể phi tuyến đến nguyên tử 8.*

Sự phát sóng hài bậc hai

Trong khi rút ra phương trình (15-32), chúng ta giả sử rằng hiệu suất chuyển đổi hài thấp tức là E_1 và E_2 giữ nguyên gần giá trị ban đầu của chúng, còn E_3 tương đối nhỏ so với chúng. Giả thuyết này cản trở tính toán về việc có bao nhiêu năng lượng chuyển từ cơ bản sang hài. Một ví dụ liên quan đến sự phát sóng hài bậc hai sẽ cho phép tính toán sự chuyển năng lượng giữa các sóng cơ bản và sóng hài. Chúng ta sẽ giả sử rằng

1. Sự phát sóng hài bậc hai, $\omega_3 = 2\omega$, ở đây $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.
2. Vật liệu là một điện môi hoàn hảo, $\sigma = 0$. Chúng ta không cần lo lắng về sự mất mát trong môi trường
3. Các vật liệu phi tuyến chiếm một nửa mặt phẳng dương, $z \geq 0$.
4. $E_1 = E_2 = E(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ và $E_3 = E(2\omega)e^{i\varphi(2\omega)}$
5. Không có sự tán sắc để $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$. Giả thiết này cho phép sự hợp pha hoàn hảo, $\Delta k = 0$.
6. $E_3 = 0$ và $E_1 = E_0 e^{i\varphi(\omega)}$ tại z = 0, biên của vật liệu phi tuyến.

Giả thuyết này cho phép chúng ta viết lại (15-26) và (15-27) là

$$\frac{\partial E(\omega)}{\partial z} = -i\sqrt{\frac{\mu}{\in}}\frac{d\omega}{2}E(\omega)E(2\omega)e^{i\phi(2\omega)} \qquad (15\text{-}35)$$

$$\frac{\partial E(2\omega)}{\partial z} = -i\sqrt{\frac{\mu}{\in}}d\omega E^2(\omega)\exp\{i[2\phi(\omega)-\phi(2\omega)]\} \qquad (15\text{-}36)$$

Đối với sự tạo sóng hài bậc hai, chúng ta đòi hỏi

$$2\varphi(\omega) - \varphi(2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

tức là, pha của sóng tạo ra phải trễ so với sự phân cực tạo ra nó một góc 90 °. Khi điều này xảy ra, (15-36) là một hàm dương thực

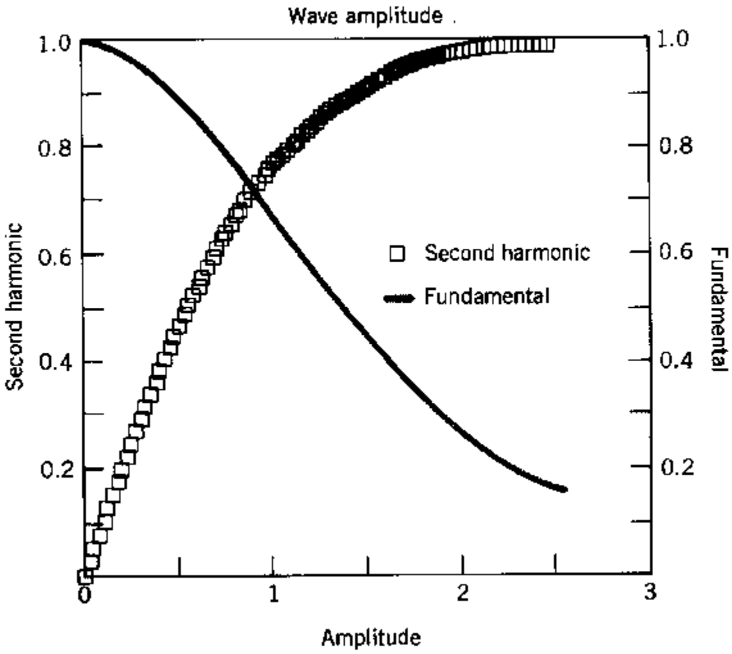
Chúng ta cũng dùng định luật bảo toàn năng lượng được chứng minh trong bài tập 15-3. Định Luật này phát biểu rằng tổng của các mật độ công suất của các sóng cơ bản và sóng hài bậc hai phải là không đổi trên một khoảng cách lan truyền, cho phép chúng ta viết lại (15 -36) là

$$\frac{\partial E(2\omega)}{\partial z} = d\omega\sqrt{\frac{\mu}{\in}}\left[E_0^2(\omega) - E^2(2\omega)\right] \qquad (15\text{-}37)$$

Bằng cách lấy tích phân (15-37) từ z = 0 đến z = L, chúng ta có được một phương trình cho biên độ sóng hài bậc hai ở khoảng cách L trong môi trường phi tuyến là:

$$E(2\omega) = E_0(\omega)\tanh\left[E_0(\omega)Ld\omega\sqrt{\mu/\in}\right] \qquad (15\text{-}38)$$

Định luật bảo toàn của bài toán 15-3 cho phép sử dụng (15-38) để thu được biên độ của trường cơ bản



Hình 15-2. Năng lượng của các sóng cơ bản và sóng hài bậc hai khi chúng vào vật liệu phi tuyến.

$$E(\omega) = E_0(\omega)\sec h\left\lfloor E_0(\omega) L d\omega \sqrt{\mu / \in} \right\rfloor$$

(15-38) và (15-39) được trình bày trong hình 15-2. Hệ số góc ban đầu của đường cong sóng hài bậc hai được cho bởi (15-32) với $\Delta k = 0$.

Lý thuyết đơn giản dự đoán khả năng thu được100% chuyển đổi của sóng cơ bản thành các sóng hài bậc hai. Lý thuyết lượng tử dự đoán rằng khi sóng cơ bản co về mức nhiễu lượng tử, các dòng chảy năng lượng sẽ đảo ngược và sóng cơ bản hình thành sẽ triệt tiêu sóng hài bâc hai. (Những kết quả này đã được rút ra đối với tương tác sóng phẳng. Trong thực tế, để tạo ra các trường ánh sáng, người ta thường sử dụng chùm Gauss)

Phương pháp hợp pha

Có nhiều cách khác nhau để thu được điều kiện hợp pha đã được đề xuất. Chúng ta sẽ thảo luận các phương pháp này bởi vấn đề hợp pha là chìa khóa then chốt để tận dụng sự phi tuyến bậc hai để phát sóng hài.

Sự biến thiên tuần hoàn của hệ số phi tuyến

Nếu sự lệch pha giữa sóng hài và sóng cơ bản bị thay đổi 180 °, sau khi sóng đã truyền trên một chiều dài kết hợp, chúng ta có thể ngăn năng lương mất mát do sự chuyển từ sóng hài trở lại sóng cơ bản. Một cách để thực hiện việc này là xếp một loạt các tấm tinh thể hoặc các lớp màng mỏng, mỗi miếng có một độ dài kết hợp (xem hình 15-3). Trong thiết kế này, chiết suất được giả sử là giống nhau ở mỗi lớp để không có phản xạ tại bề mặt chuyển tiếp.

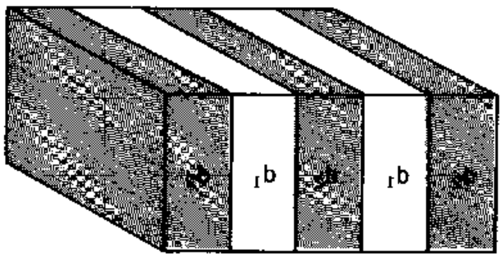
Để hiểu được phương pháp này, đầu tiên chúng ta giả sử không có tương tác phi tuyến trong các lớp được tô đen của hình 15-3, $d_2 = 0$. Sau khi truyền qua một độ dài kết hợp trong vật liệu một, với hệ số quang phi tuyến d_1, sóng cơ bản và sóng hài lệch pha nhau một góc π .Nếu chúng ta không làm gì cả thì năng lượng sẽ bắt đầu chảy ngược lại từ hài về sóng cơ bản. Tại thời điểm này, hai sóng đi vào lớp vật liệu thứ hai. Do chúng ta giả sử rằng $d_2 = 0$, không có tương tác phi tuyến trong vật liệu thứ hai, hai sóng được ghép và không có tương tác. Sau khi truyền qua một chiều dài kết hợp trong môi trường tuyến tính, các sóng lại cùng pha. Các sóng cùng pha lại một lần nữa đi vào vùng phi tuyến với hệ số phi tuyến d_1, và có thêm năng lượng được chuyển từ sóng cơ bản sang sóng hài.

Cái giá hải trả do sự hợp pha theo cách này là sự giảm hệ số quang phi tuyến hiệu dụng xuống d_1/π . Nếu các lớp vật liệu tuyến tính được thay thế bằng lớp vật liệu phi tuyến với hệ số phi tuyến $d_2 = -d_1$, thì hệ số phi tuyến hiệu dụng sẽ được nhân đôi.

Chúng ta dễ dàng thấy rằng sự hợp pha đối với sự trộn tần số hiệu đạt được khi

$$\Delta k = k_3 - k_1 + k_2 = \frac{(2m+1)\pi}{\ell}$$

ở đây ℓ là độ dày của từng tấm và m là một số nguyên không đổi. Khi $m = 0$, thì ℓ bằng với chiều dài kết hợp tự nhiên. Cường độ đầu ra dùng kỹ thuật này là ở mức tốt nhất (khi m = 0), chỉ bằng 40% giá trị của hợp pha hoàn hảo. Hợp pha này đã được tìm thấy trong GaAs.[72]



Hình 15-3. Hệ lớp vật liệu phi tuyến. Dấu của hệ số phi tuyến được biến điệu tuần hoàn với chu kì biến điện bằng chiều dài kết hợp

Phản xạ toàn phần

Chúng ta có thể sử dụng sự kiện là sóng chịu một sự thay đổi pha khi phản xạ toàn phần (xem Hình 3-13) để có được sự hợp pha. Xét sự phát sóng hài bậc hai, sự thay đổi pha tương đối khi phản xạ là

$$\varphi = 2\delta(\omega) - \delta(2\omega)$$

ở đây δ thu được từ một trong hai công thức (3-54) hoặc (3-55). Sự thay đổi pha tương đối giữa sóng cơ bản và và sóng hài là do sự tán sắc là

$$2\psi = [n(2(\omega) - n(\omega))]\frac{2\omega L}{c}$$

ở đây chúng ta giả sử rằng khoảng cách truyền là L. Sự thay đổi pha này được bù bằng cách điều chỉnh thích hợp θ, góc tới. Hợp pha do phản xạ toàn phần đã được quan sát dùng laser CO_2 ở bước sóng bằng 10.5915 μm, với bố trí được biểu diễn trong hình 15-4.[73]

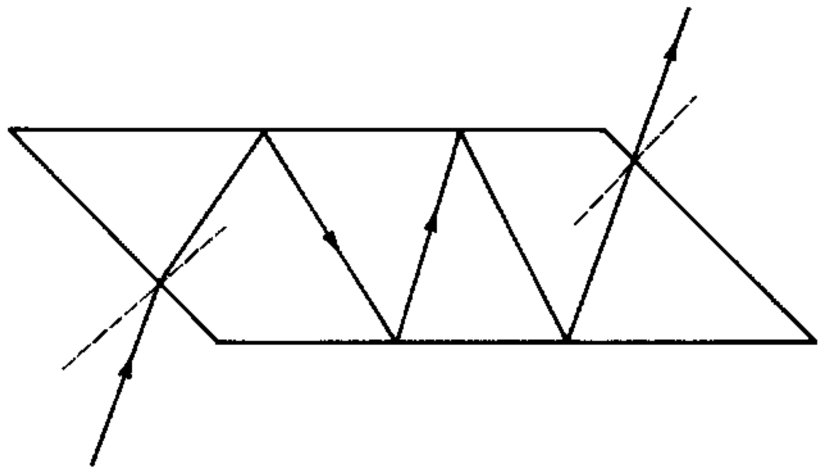
Ống dẫn sóng điện môi

Sử dụng ống dẫn sóng để hợp pha là sự mở rộng tự nhiên của việc sử dụng phản xạ toàn phần. Ứng với mỗi mode ống dẫn sóng được kích thích là một chiết suất hiệu dụng khác nhau (xem Chương 5)

$$N = \frac{\beta}{k} \qquad (15\text{-}40)$$

Chiết suất hiệu dụng nằm trong khoảng giữa giá trị của đế và vật liệu dẫn sóng dạng khối.

Thảo luận toán học về loại hợp pha này có thể được tìm thấy trong bài báo đề nghị dùng nó cho các hoạt động ở vùng phổ bước sóng dưới milimet.



Hình 15-4. Cấu hình để thu được hợp pha dùng phản xạ toàn p

Hợp pha không cộng tuyến

Các kỹ thuật trước đây được gọi là kỹ thuật cộng tuyến bởi vì các sóng truyền cùng hướng. Có thể thực hiện hợp pha bằng kỹ thuật không cộng tuyến khi các sóng truyền một góc với nhau. Khái niệm hợp pha không cộng tuyến là dễ như có thể thấy trong hình 15-5. Thay vì đòi hỏi phương trình bảo toàn động lượng vô hướng được thỏa mãn thì ở đây phương trình vector phải được thỏa mãn

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = 0 \tag{15-41}$$

Giới hạn điều kiện hợp pha đặt trên góc α, giữa k_1 và k_2, và góc β, giữa k_1 và k_3, có thể dễ dàng được rút ra bằng cách dùng định lý cosin trong hình 15-5

$$k_3^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{n_1^2\omega_1^2 + n_2^2\omega_2^2 - n_3^2\omega_3^2}{2n_1\omega_1 n_2\omega_2} \tag{15-42}$$

Để đánh giá ứng dụng vật lý của kết quả này, chúng ta xét trường hợp sự tạo tần số phách $\omega_1 - \omega_2 = \omega_3$. Để đơn giản, chúng ta dùng giả thuyết vật lý thực tế rằng $n_1 \approx n_2 = n$, $n_3 = n + \Delta n$, và $\Delta n^2 \approx 0$ (xem bảng 15.4 trong đó giá trị chiết suất đối với trường hợp sóng hài bậc hai có thể được so sánh). Với những giả thiết này về chiết suất, góc α là

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\omega_3^2}{2n\omega_1\omega_2} \tag{15-43}$$

Với giá trị α nhỏ có nghĩa là sóng gần cộng tuyến ,

$$\alpha \approx \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\sqrt{\frac{2\Delta n}{n}}$$

Vì α là thực chỉ khi $\Delta n > 0$, hợp pha không cộng tuyến với sự tạo tần số hiệu có thể được tạo ra trong vùng tán sắc dị thường.

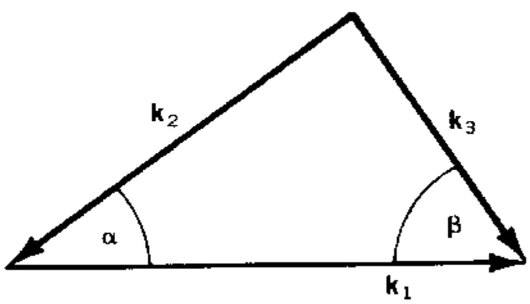


FIGURE 15-5. Noncollinear phase matching. The vector sum of the propagation vectors is set equal to zero rather than the scalar sum.

Như chúng ta đã làm với α, chúng ta cũng sử dụng định lý cosin cho β

$$\sin^2\frac{\beta}{2} \approx \frac{2n\Delta n\omega_1\omega_3 - 2n\Delta n\omega_3^2}{4n(n+\Delta n)\omega_1\omega_3}$$

$$= \frac{\Delta n}{2(n+\Delta n)} - \frac{\Delta n\omega_3}{2(n+\Delta n)\omega_1}$$

Từ hình được dùng trong 15-5, $\omega_3 < \omega_1$, số hạng thứ hai nhỏ hơn thứ nhất, và chúng ta có thể bỏ qua nó. Nếu chúng ta có thể giả sử như chúng ta đã làm đối với α, là các sóng gần cộng tuyến $\sin\beta/2 \approx \beta/2$, và góc β là

$$\beta = \sqrt{\frac{2\Delta n}{n}} \qquad (15\text{-}44)$$

Góc β trong phép gần đúng được dùng ở đây không phụ thuộc vào tần số. Đó là đặc tính dải rộng được miêu tả bởi **(15-44)**, là một thuận lợi của hợp pha không cộng tuyến (xem bài tập 15-7).

Các ví dụ hình học được dùng cho sự trộn không cộng tuyến được mô tả ở hình 15-6.

Một ứng dụng có ích của hợp pha không cộng tuyến l à đo xung quang học pi cô giây dùng sự tự điều chỉnh phát sóng hài bậc hai (xem hình 15-7 và bài tập 15-7).

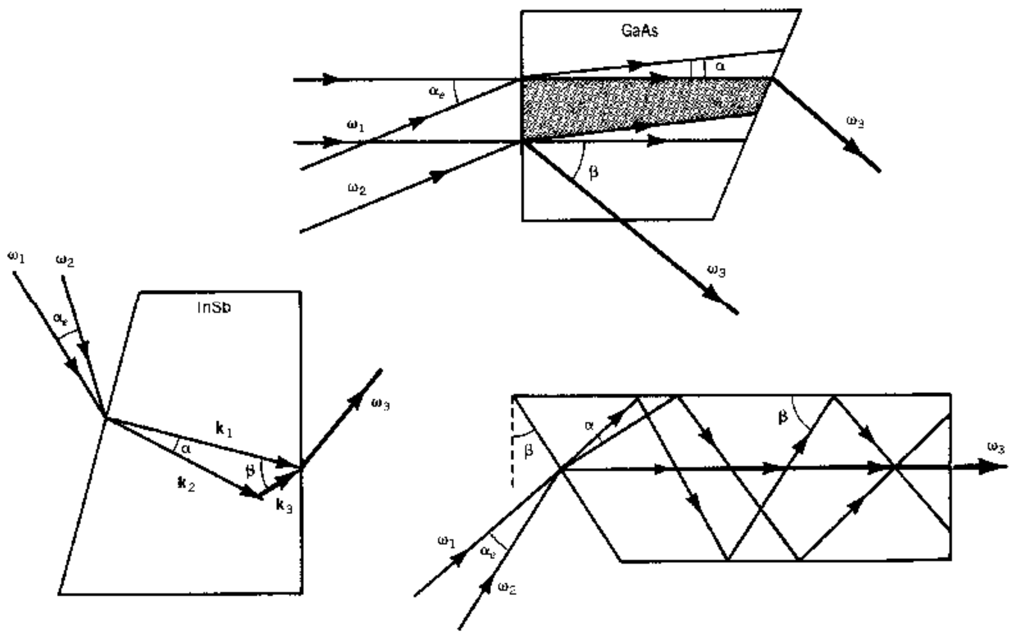


FIGURE 15-6. Geometries used for noncolinear phase matching. The slanted faces are at Brewster's angle, to allow efficient coupling. The guided-wave geometry in the bottom figure is to increase the effective interaction length

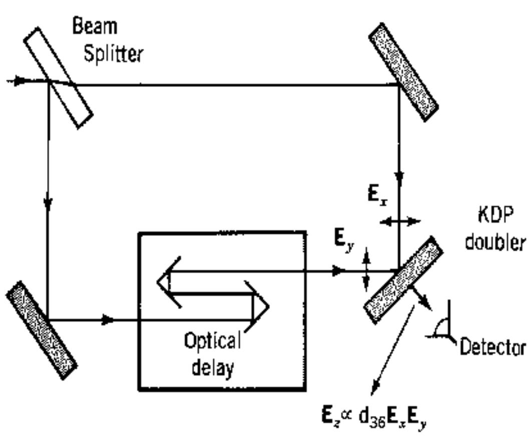


FIGURE 15-7a. Psec pulse detection using the autocorrela-autocorrelation of two samples of a pulse. One sample is delayed by a
time t with respect to the other sample.

Hai mẫu của xung pico giây thu được với một bộ tách chùm. Một trong các mẫu được trì hoãn thời gian bằng cách truyền nó trên một quang lộ dài hơn. Hai mẫu được thêm vào cùng nhau trong tinh thể phi tuyến. Lượng bức xạ sóng hài bậc hai được tạo ra bằng sự xen phủ thời gian của hai xung(hình 15-7b). Bằng cách thay đổi thời gian trì hoãn, sự tự điều chỉnh của xung pico giây được tạo ra. Phân giải thời gian thu được bằng cách thay đổi quang lộ để thay đổi τ chứ không phải qua sự phân giải thời gian của detector.

Hợp pha không cộng tuyến ngẫu nhiên giữa các chùm ở trên trục cơ bản và năng lượng tán xạ từ sóng bậc hai có thể được quan sát ở trong các tinh thể ở đó hợp pha cộng tuyến xuất hiện. Trong sự phát sóng hài bậc hai, điều này dẫn đến các biên dạng hình vòng lý thú.

Hợp pha lưỡng chiết

Phương pháp phổ biến nhất của hợp pha tận dụng sự kiện trong một tinh thể bất đẳng hướng chiết suất phụ thuộc vào cả bước sóng và hướng của sóng ánh sáng. Chúng ta đã rút ra một biểu thức của chiết suất như một hàm theo hướng truyền đối với tinh thể đơn trục trong phụ lục 13-C. Đồ thị về chiết suất bất thường như một hàm theo góc giữa hướng truyền và trục quang học được biểu diễn trong hình 15-8. Đường cong được tạo ra với **(13C-7)**. Hình 15-8 cho thấy rằng chiết suất có thể được điều chỉnh giữa n_e và n_0 bằng cách thay đổi hướng truyền. Nếu sự thay đổi chiết suất do sự thay đổi lưỡng chiết lớn hơn sự thay đổi chiết suất do tán sắc thì hợp pha có thể đạt được. Sự hợp pha được thực hiện bằng các dùng sóng phân cực tuyến tính truyền theo một góc thích hợp, để đảm bảo rằng

$$n(2\omega) = n(\omega)$$

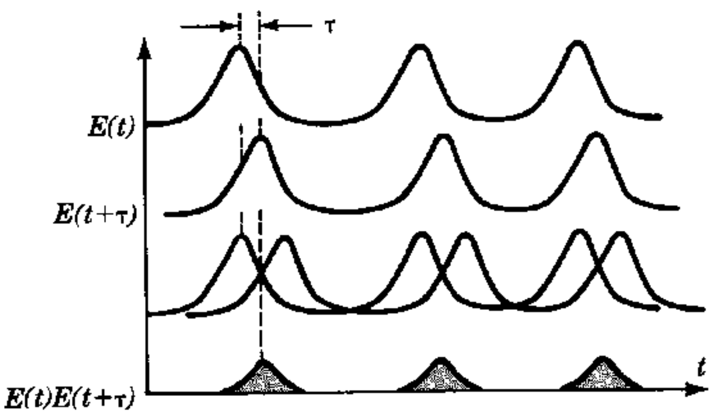


FIGURE 15-7b. The two pulses are overlapped in space, the second curve from bottom, by adjusting τ. The overlapping pulses produce the second harmonic emission shown as the bottom curve. Only the area under the pulse at the second harmonic is detected. Temporal resolution is obtained by varying τ.

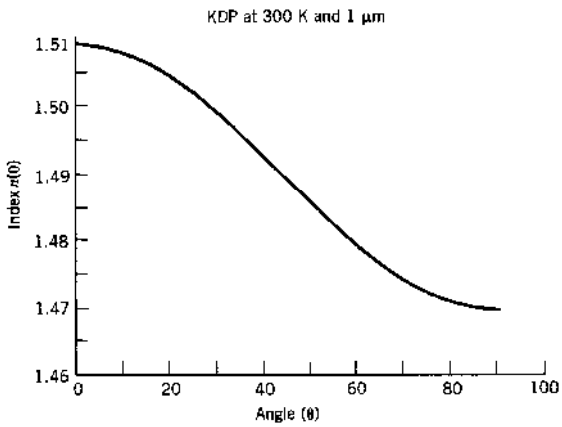


FIGURE 15-8. The variation in the value of the extraordinary index of refraction with propagation angle in KDP at room temperature. The index varies from n_0 at θ = 0° to n_e at θ = 90°.

Có hai phương pháp để đạt được điều kiện hợp pha dùng tính lưỡng chiết :

Loại I. Sóng ở tần số ω_1 và ω_2 cả hai cò cùng trạng thái phân cực, tức là cả hai đều là tia thường hoặc tia bất thường. Sóng thứ ba ở tần số ω_3 được phân cực theo hướng vuông góc.

Loại II. Sóng ở tần số ω_1 và ω_2 được phân cực vuông góc. Và sóng thứ ba ở tần số ω_3 có thể có hướng phân cực song song với một trong hai sóng còn lại.

Để minh họa sự hợp pha sử dụng tính chất lưỡng chiết, điều kiện hợp pha đối với ba tinh thể đơn trục có thể được xác định. Đối với các sóng truyền cộng tuyến, điều kiện hợp pha (15-42) trở thành :

$$n_3\omega_3 = n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2 \qquad (15\text{-}45)$$

Chiết suất phụ thuộc vào loại hợp pha và lọai tinh thể lưỡng chiết, lưỡng trục hay dơn trục dương hoặc âm. Đối với tinh thể đơn trục, hợp pha trở thành

$$n_e < n_0, \qquad\qquad n_e > n_0$$

Type I

$$n_e(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2), \qquad n_0(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_e(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_e(\omega_2)$$

Type II

$$n_e(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_e(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2), \qquad n_0(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_e(\omega_2)$$

Ba đường cong tiếp theo biểu diễn chiết suất của tia thường và tia bất thường như một hàm theo bước sóng đối với ba tinh thể lưỡng chiết: thạch anh, $LiNbO_3$,và KDP

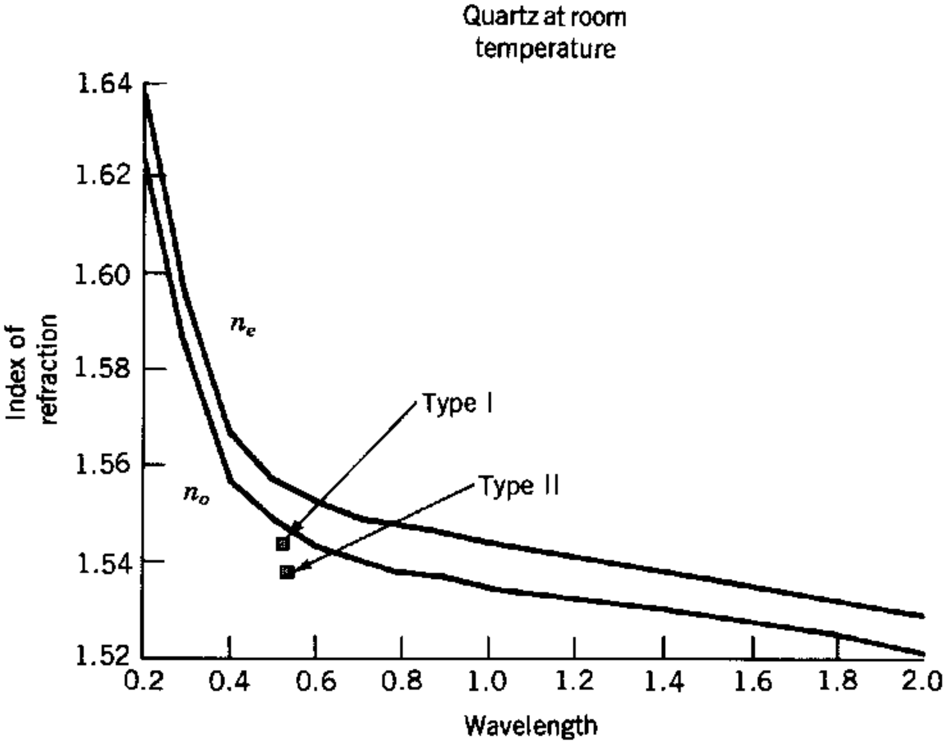
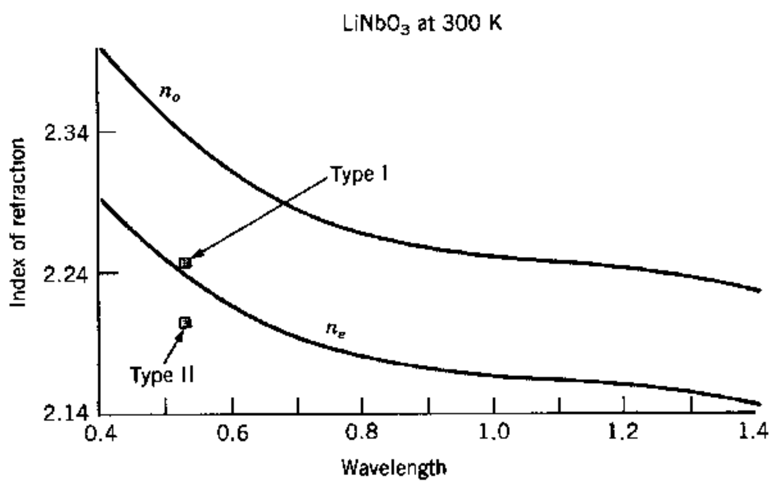


FIGURE 15-9. Dispersion in quartz. The points labeled type I and type II are the indices that would have to exist if we could have phase matching in quartz for doubling of 1.06 μm.

cùng với đồ thị đường cong tán sắc đối của những tinh thể này, các điểm được vẽ trong đồ thị chỉ ra điều kiện hợp pha được đòi hỏi để chuyển bức xạ bước sóng 1.06 μm sang bước sóng 530 nm.

Đường cong đầu tiên trong hình 15-9 biểu diễn sự tán sắc của chiết suất thường và bất thường của thạch anh. Những đường cong này bao quanh chiết suất có thể tới được tại mỗi tần số bằng cách thay đổi hướng truyền. Các điểm có tên "loại I" và "loại II" là chiết suất phải tồn tại nếu hợp pha xuất hiện đối với sự tạo sóng hài bậc hai với bước sóng cơ bản là 1.06 μm. Chiết suất mà ánh sáng 530 nm phải có nhỏ hơn bất cứ chiết suất nào trong thạch anh; do đó, hợp pha không thể đạt được.

Đường cong tiếp theo trong hình 15-10, là cho $LiNbO_3$. Từ vị trí của chiết suất sóng hài bậc hai II được đòi hỏi cho hợp pha loại II, chúng ta thấy rằng hợp pha loại I chỉ có thể xuất hiện trong $LiNbO_3$ đối với sự tạo sóng hài bậc hai 1.06 μm.



Hình 15-10. Sự tán sắc trong lithium niobate. Như có thể thấy đối với sự nhân đôi 1.06 μm, chỉ hợp pha loại I có thể xảy ra.

Trong hình 15-10, rõ ràng hợp pha loại I thu được gần đúng khi $\theta = 90^0$. Hợp pha chính xác ở 90^0 có thể thu được bằng cách điều chỉnh nhiệt độ của tinh thể. Hợp pha ở 90^0 được gọi là hợp pha không tới hạn. Hợp pha tới hạn xuất hiện trong tất cả hướng truyền khác.

Hợp pha không tới hạn có ưu điểm trong sự phát sóng hài bậc hai. Khi ánh sáng truyền vuông góc với trục quang học của tinh thể lưỡng chiết, các sóng thường và bất thường truyền theo hướng cộng tuyến. Tại tất cả các góc khác, ngoại trừ 0^0, sự lưỡng chiết được quan sát và hai sóng truyền hợp một góc đối với nhau. Đây được gọi là walk- off vector Poynting [xem bài toán 13-9 và **(13-36)**]. Đối với các tinh thể lưỡng chiết điển hình khi hướng truyền làm một góc $\theta = 45^0$ với trục quang học, walk-off vecror Poyting khoảng 2^0.Thông thường cần tập trung sóng ánh sáng đến để tăng tương tác phi tuyến . Walk-off vector Poyting làm cho các sóng thường và bất thường gắn với chùm điều tiêu bị tách sau một khoảng cách được goị là chiều dài khe

$$l_\alpha = \frac{\sqrt{\pi\omega_0}}{\phi}$$

Ở đây ϕ là walk-off vector Poyting **(13-A), và** ω_0 là bán kính cổ chùm. Bằng cách thu hợp pha ở 90^0, chúng ta có thể loại trừ walk-off vector Poyting và tăng chiều dài khe đối với sóng hài bậc hai. Hợp pha không tới hạn mang đến một thuận lợi về góc nhận, tức là sự mở rộng góc của chùm cơ bản, nhiều cỡ bậc độ lớn trên góc chấp nhận đối với hợp pha tới hạn.

KDP là một vật liệu có cả hợp pha loại I và hợp pha loại II mà chúng ta có thể thấy như hình (15.11). Đối với hợp pha loại I, góc hợp pha cho bởi công thức:

$$\sin^2\theta_m = \frac{\dfrac{1}{n_0^2(\omega)} - \dfrac{1}{n_0^2(2\omega)}}{\dfrac{1}{n_e^2(\omega)} - \dfrac{1}{n_e^2(2\omega)}} \qquad (15\text{-}46)$$

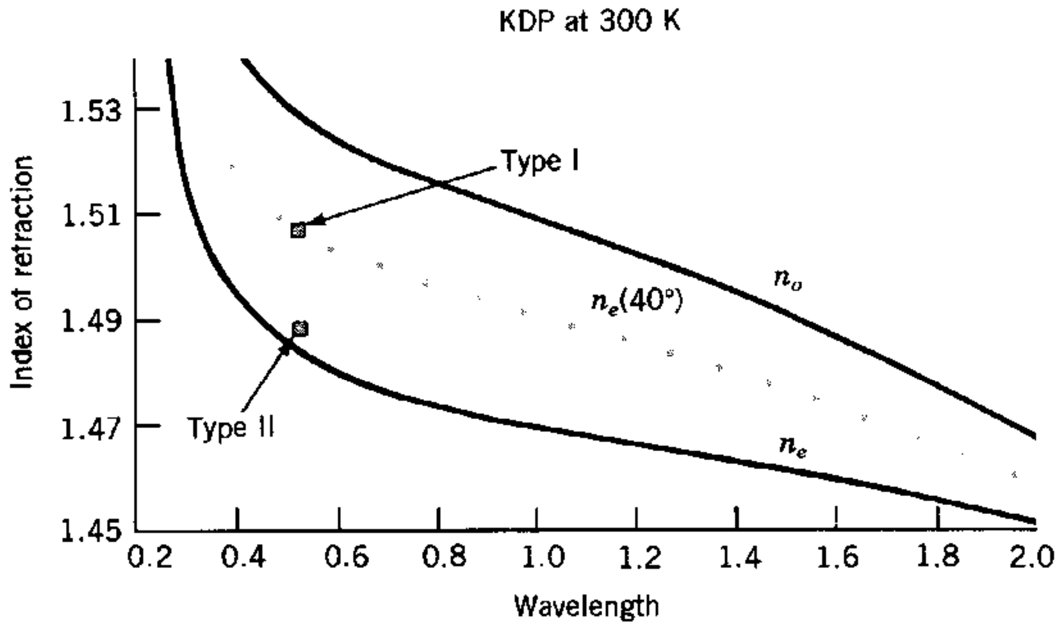


FIGURE 15-11. Dispersion in KDP. The birefringence is large enough in KDP to allow bo type-I and type-II phase matching for the doubling of 1.0 μm. Note the angle for type-I pha matching is 42.4°.

Hình 15- 11. Sư tán sắc trong KDP. Sự lưỡng chiết trong KDP đủ lớn để cho phép cả hai loại hợp pha loại I và hợp pha loại II đối với sự nhân đôi tần số 1.0 µm. Cần chú ý góc hợp pha loại I l à $42,4^0$.
và góc đối với hợp pha loại 2:

$$\sin^2\theta_m = \frac{\left[\dfrac{n_0(\omega)}{2n_0(2\omega)-n_0(\omega)}\right]^2 - 1}{\left[\dfrac{n_0(\omega)}{n_e(\omega)}\right]^2 - 1} \qquad (15\text{-}47)$$

Trong những vật liệu cho phép cả hai loại hợp pha làm sao chúng ta có thể quyết định chọn lựa loại hợp pha nào sẽ sử dụng? Một lý do để chọn lựa loại hợp pha là khả năng hoạt động với sóng truyền theo hướng 90^0 đối với trúc quang học. Lý do thứ hai để lựa chọn một loại hợp pha có thể được tìm thấy trong bảng 15.5. Độ lớn d_{eff} là một hàm theo góc hợp pha. Đối với hợp pha loại I trong thành viên của nhóm 42m, chúng ta tìm thấy từ bảng (15.5) rằng:

$$d_{eff} = -d_{14}\sin\theta\sin 2\phi$$

Một khi θ được cố định bởi điều kiện hợp pha chúng ta có thể cực đại d_{eff} bằng cách chọn hướng truyền sao cho nó tạo một góc $\theta = 45^0$ với trục x của tinh thể. Trong bảng 15.5, ta có thể thấy đối với các thành viên 42m, sự lựa chọn $\theta = 90^0$ dẫn đến $d_{eff} = 0$ đối với hợp pha loại I. Để cực đại d_{eff} đối với loại hợp pha loại II trong thành viên 42m, chúng ta chọn $\phi = 0$ và góc hợp pha $\theta = 45^{0.}$. Chúng ta đang giả sử rằng góc hợp pha xuất hiện tại những góc này.
Sự mô tả lý thuyết về tính chất phi tuyến bậc 3 của một hệ có thể được xây dựng với thủ tục tương tự như xây dựng lý thuyết bậc 2. Trong lý thuyết phi tuyến bậc hai, $\chi^{(2)}$ thể hiện cả tính chất mất mát và cộng hưởng tương tự với $\chi^{(1)}$, $\chi^{(3)}$ thể hiện tính chất cộng hưởng. Phần ảo của $\chi^{(3)}$, tương tự với sự mất mát hoặc sự thu

năng lượng mô tả tán xạ Raman, Brillouin, và Rayleigh củng như các quá trình 2 photon. Phần thực của $\chi^{(3)}$ mô tả quá trình phát sóng bậc 2, hiệu ứng Kerr quang học, sự thay đổi chiết suất phụ thuộc vào cường độ. Sự phân cực phi tuyến được cho bởi các số hạng có dạng

$$\left[P_{NL}^{(3)}(\omega_4)\right]_i = D\left(\sum_{jkl}\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)E_j(\omega_1)E_k(\omega_2)E_l(\omega_3)+c.c\right) \tag{15-48}$$

Ở đây D là hằng số phụ thuộc vào giá trị của ω_1 ω_2 ω_3 và ω_4; xem bảng 15.7. $\chi^{(3)}$ là tensor hạng 4 ,thiết lập mối quan hệ giữa một vector với ba vector khác .

Các đối số đối xứng có thể được áp dụng cho $\chi^{(3)}$, như khi chúng là $\chi^{(2)}$ dẫn đến một sự đơn giản hóa.[76] Một kết quả quan trọng của các đối số đối xứng là $\chi^{(3)}$ #0 đối với sự đối xứng xuyên tâm, tức là các hệ có đối xứng đảo. Các yếu tố khác 0 của tensor được chỉ ra trong phụ lục 14A cách xa điều kiện cộng hưởng

$$o\{\chi^{(3)}\} \approx \begin{cases} 10^{-33}, cgs \\ 10^{-58}, mks \end{cases}$$

$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, 0, 0, \omega)$ là độ cảm gắn với hiệu ứng Kerr quang học được thảo luận ở chương 14. Chúng ta chỉ xét một số hạng phụ của sự phân cực phi tuyến bậc ba

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega,\omega,\omega,\omega)$$

Nó gắn với hiệu ứng Kerr quang học. Chúng ta sẽ khám phá ra rằng lý thuyết cho phép hiệu ứng được giải thích như một quá trình toàn kí. Một số giá trị điển hình $\chi^{(3)}$ được cho trong bảng 15.8

Một trong những quá trình gắn với $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \omega, \omega, \omega)$ được gọi là trộn bốn sóng suy biến hoặc liên hợp pha. Chi tiết toán học về lý thuyết tương tự với sự phân tích phi tuyến bậc hai được mô tả trước đây. Bố trí thực nghiệm được dùng trong xây dựng lý thuyết được biểu diễn trong hình (15-12).

Bố trí thực nghiệm làm cho có thể xét mỗi sóng một cách riêng biệt, rút bài toán về việc giải phương trình sóng liên quan đến $P^{(3)}$. $k_1 + k_2 = 0$ trong hình 15-12 cho phép bài toán được rút về bài toán một chiều. Hướng của các vector k đảm bảo rằng sự hợp pha sẽ diễn ra đồng thời.

Phương trình sóng được giải trong (15-19), với trường đặt vào bao gồm 3 sóng, mỗi sóng mô tả bởi **(15-20)**. Sự phân cực phi tuyến sẽ liên quan đến các số hạng có dạng:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}E_{1j}E_{2k}E_{3l}^{*}e^{i(\omega t-kz)} \tag{15-49}$$

Cũng như các số hạng liên quan đến 2ω. Chúng ta sẻ bỏ qua các số hạng 2ω và điều chỉnh để bỏ qua các số hạng tần số cao hơn này sau.

Tất cả các sóng được giả sử phân cực giống nhau để cho chỉ một trong các thành phần tensor của $\chi^{(3)}$ đi vào trong tính toán. Giả thiết này cho phép thay thế tensor với một đại lượng vô hướng

$$\chi^{(3)}_{1111} \rightarrow \chi^{(3)}$$

(giả thiết này bị hạn chế hơn là chúng ta cần. Chúng ta có thể nới lỏng giả thiết và đòi hỏi rằng sóng cặp 1 và 2 và 3 và 4 mỗi cái có cùng chế độ phân cực. Độ cảm sẽ vẫn còn chứa một thành phần tensor.

$$\chi^{(3)}_{1221} \rightarrow \chi^{(3)}$$

Và độ cảm có thể tiếp tục xem như 1 đại lượng vô hướng). Sẻ đơn giản hơn nủa có thể thu được bằng cách giả sử rằng

$$|E_3|, |E_4| << |E_1|, |E_2|$$

Dùng phương pháp tương tự như phương pháp mô tả được rút ra từ phương trình **(15-23)**đến **(15-25)**, phương trình sóng đối với biên độ phức của sóng được tạo ra bởi tương tác phi tuyến có thể viết là:

$$\frac{dE_4}{dz} = -i\frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}[|E_1|^2 + |E_2|^2]E_4 - i\frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}E_1 E_2 E_3^* \tag{15-50}$$

Số hạng thứ nhất trong **(15-50)** mô tả hiệu ứng Kerr quang học, số hạng này có thể được tích hợp trong lý thuyết bằng cách điều chỉnh vecto sóng của sóng 4 từ k th ành

$$k = k + \frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}[|E_1|^2 + |E_2|^2\}] \tag{15-51}$$

Hằng số truyền mới này có thể được gộp vào định nghĩa về biên độ phức của 4 sóng bằng cách đưa vào một biên độ phức mới có dạng

$$A = Ee^{-ikz} \tag{15-52}$$

Với định nghĩa mới, **(15-50)** trở thành các sóng 3 và 4

$$\frac{dA_4}{dz} = -i\frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}A_1 A_2 A_3^* \tag{15-53}$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = -i\frac{\omega\chi^{(3)*}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}A_1^* A_2^* A_4 \tag{15-54}$$

Chúng ta sẽ không giải (15-50) đối với sóng 1 và 2 nhưng thay vào đó sẽ xét chúng như một trong các điều kiện môi trường và gộp các hiệu ứng này vào trong hằng số vật liệu được định nghỉa bởi phương trình :

$$\kappa = \frac{\omega\kappa^{(3)*}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}}A_1^* A_2^* \tag{15-55}$$

Hằng số vật liệu này là chiết suất phụ thuộc không gian và sẽ ảnh hưởng đến sự truyền các sóng còn lại.

Nó thực hiện vai trò như một hệ số ghép giữa các sóng khác nhau.

Nghiệm của phương trình **(15-53)** và **(15-54)** có thể thu được dễ dàng. Môi trường phi tuyến có thể giả sử chiếm nửa mặt phẳng dương với một biên ở *z=0* và biên kia ở *z=L*. Vì có các điều kiện biên, chúng ta sẻ giả sử rằng sóng 4 tới ở môi trường phi tuyến từ bên trái với biên độ phức $A_4(0)$ ở biên. Chúng ta giả sử rằng sóng với biên độ phức A_3 được tạo ra trong môi trường phi tuyến do đó chúng ta phải có $A_3(L)= 0$ ở phía bên phải môi trường phi tuyến. Nghiệm của **(15-54)** đối với sóng 3 là:

$$A_3(z) = \frac{\cos|\kappa z|}{\cos|\kappa|L} A_3(L) + i\kappa^* \frac{\sin|\kappa|(z-L)}{|\kappa|\cos|\kappa|L} A_4^*(0)$$

Nghiệm của **(15-53)** được để lại như một bài tâp ; xem bài tập 15-5…

Tại mặt trước môi trường phi tuyến, ta có công thức :

$$A_3(0) = -i\frac{\kappa^*}{|\kappa|} A_4^*(0)\tan|\kappa|L \tag{15-56}$$

Phương trình **(15-56)** tiên đoán rằng môi trường phi tuyến bậc 3 sẽ đóng vai trò như một gương với tính chất độc nhất là phản xạ liên hợp của sóng tới (xem chương 12 về các sóng liên hợp). Hệ số phản xạ của gương này sẽ lớn hơn 1 bất cứ khi nào

$$\frac{\pi}{4} \le |\kappa|L \le \frac{3\pi}{4}$$

Một trong những khía cạnh lý thú của hệ thống liên hợp pha là nó tương tự với phương pháp chụp ảnh toàn ký. Giả sử một lúc nào đó κL nhỏ để $\tan\kappa L$ có thể thay bằng κL. Phương trình **(15-56)** mô tả biên độ phức của sóng truyền sang bên trái trong hình 15-12, khi nó rời môi trường phi tuyến. Đối với κ *L nhỏ*, **(15-56)** trở thành:

$$A_3(0) = -i\frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\in}} A_1 A_2 A_4^*(0) \tag{15-57}$$

Do sự tương tự với các số hạng trong **(12-4)** , chúng ta xét sự hình thành A_3 như là sự nhiễu xạ của A_1 bởi một hệ vân được tạo ra do giao thoa giữa A_2 và A_4^*, như được biểu diễn trong hình15-13a. Sự diễn giải thứ hai có liên quan đến sự hình thành A_3 xem nó như là sóng bắt nguồn từ sự nhiễu xạ của sóng A_2 qua một hệ thống vân được tạo ra qua sự giao thoa của A_1 và A_4^* (hình 15-13b).

Trong ảnh liên hợp pha này, các số hạng liên quan đến 2ω mà chúng ta đã bỏ qua trước đây liên quan đến tập hợp các vân chuyển động. Nếu môi trường phi tuyến có đáp ứng thời gian quá chậm với chuyển động của các vân.

Hình 15-13. Liên hợp pha từ quan điểm toàn kí. (a) Chùm 1 và 4 liên hợp ngược dọc theo cùng đường truyền được lấy bởi A_4 khi đạt đến môi trường liên hợp, sau đó A_3 đến nguồn A_4 sẽ có cùng dạng như A_4. Điều này xuất hiện bất kể sóng bị méo bởi môi trường nhiều như thế nào dọc theo đường truyền, miễn là sự méo không thay đổi. Thí nghiệm đầu tiên về sự loại trừ méo bằng liên hợp pha được thực hiện bởi Herwig

Kogelnik năm 1965. Thí nghiệm được thực hiện bằng cách tạo ra các vân giao thoa của hình 15-13 trong một tấm kính ảnh. Mặc dù đây là một thí nghiệm lí thú về ứng dụng mới lạ của chụp ảnh toàn kí, việc nó không xuất hiện trong thời gian thực làm giảm tính hữu dụng của nó.

Khả năng loại trừ méo trong thời gian thực tạo ra sự trộn bốn sóng mà chúng ta vừa mô tả rất hấp dẫn. Hình 15-14 là thí nghiệm liên hợp pha được thực hiện bởi Jack Feinberg ở đại học Southerm California. Hình15-14a là ảnh không bị méo ban đầu của một con mèo. Ảnh con mèo bị méo khi cho nó đi qua bản kính mang vật có bôi keo. Ảnh bị méo, sóng mà chúng ta sẽ dùng là A_4, được biểu diễn trong hình 15-14b. Qua việc sử dụng liên hợp pha, ảnh bị méo được phục hồi về dạng ban đầu của nó qua sự tạo sóng A_3. Sóng A_3 từ quá trình liên hợp pha được biểu diễn trong hình 15-14c.

Vì quá trình được biểu diễn trong hình 15-14 có thể được thực hiện trong thời gian thực nên nó rất hữu dụng, nhưng nhu cầu về hai chùm sáng kết hợp A_1 và A_2 làm cho việc thực thi nó lộn xộn. Giáo sư Feinberg đã khám phá ra rằng bằng cách chọn lựa vật liệu và điều kiện thực nghiệm thích hợp, chỉ cần A_4 để thực hiện liên hợp pha. Quả thực, ảnh được biểu diễn trong hình 15-14 thu được chỉ dùng A_4. Quá trình này được gọi là liên hợp pha tự bơm.

Hình 15-14. Sự phục hồi ảnh dùng liên hợp pha. (a) Ảnh ban đầu của mèo. Ảnh bị làm méo bằng cách bôi keo lên bản kính mang vật. (c) Sự méo ảnh bị loại trừ và ảnh được phục hồi bằng cách dùng liên hợp pha. Sự phục hồi hoàn chỉnh không thể thực hiện được vì một số tín hiệu méo không qua bộ liên hợp pha. (Courtesy Jack Feinberg, University of Southerm Canifornia.)

Để giải thích cách thức và nguyên nhân xuất hiện của sự liên hợp pha tự bơm cần phải đưa vào một quá trình vật lý mới và một vài sự điều chỉnh lí thuyết gắn với hệ số ghép. Không có nhiều thời gian để khảo sát chủ đề này. Sinh viên có thể tham khảo một giới thiệu rất dễ hiểu về chủ đề này của giáo sư Feinberg.

Trong chương này, ảnh hưởng của trường quang học mạnh được khảo sát. Sự phân cực cảm ứng do trường quang học không thể xem là hàm tuyến tính theo trường quang học nữa, mà bây giờ được mô tả bằng chuỗi lũy thừa

$$P_i^{\omega} = P_i^0 + \sum_j \chi_{ij} E_j^{\omega} + \sum_{j,l} \chi_{ijl} \nabla_l E_j^{\omega} + \sum_{j,l} \chi_{ijl} E_j^{\omega_1} E_l^{\omega_2} + \sum_{j,l,m} \chi_{ijlm} E_j^{\omega_1} E_l^{\omega_2} E_m^{\omega_3} + ...$$

Chúng ta dùng độ cảm điện môi

$$\chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = n^2 - 1$$

Như tham số khai triển.

Độ cảm tuyến tính được định nghĩa là

$$P(\omega_i) = \chi^{(1)}(\omega_i)\varepsilon_0 E_i$$

Thu được bằng cách bỏ qua tính chất phi tuyến

$$\chi^{(1)}(\omega_i) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_i^2}}$$

Sự phân cực phi tuyến bậc hai được định nghĩa là

$$P(\omega_i \pm \omega_j) = P_{NL}(\omega_3) = \chi^{(2)}(\omega_i \pm \omega_j)\varepsilon_0 E_i E_j$$

Độ cảm bậc hai tìm được bằng cách sử dụng lí thuyết nhiễu loạn bậc nhất. Nếu mỗi trường đặt vào có tần số khác nhau, thì lí thuyết thu được độ cảm tần số tổng và tần số hiệu là.

$$\chi^{(2)}(\omega_i \pm \omega_j) = \frac{Ne}{\varepsilon_0 E_i E_j} X_{i+j}$$

$$= \frac{Ne^3 \, {a_2}/{\varepsilon_0} \, m^2}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_i^2}\sqrt{(\omega_j^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\sqrt{\left[(\omega_i \pm \omega_j)^2 - \omega_0^2\right]^2 + \gamma^2(\omega_i \pm \omega_j)^2}} \quad (15.6)$$

Về mặt thực nghiệm có thể đo được hệ số quang phi tuyến. Nó được định nghĩa bởi phương trình

$$P(2\omega) = d(2\omega)E^2 \cos(2\omega t - 2kz)$$

Đối với sự phát sóng hài bậc hai, chúng ta có thể viết **d** theo độ cảm tuyến tính ở sóng ánh sáng cơ bản và hài bậc hai

$$\mathrm{d}(2\omega) = \mathrm{d}\frac{a_2 m \varepsilon_0^3}{2N^2 e^3}\left[\chi^{(1)}(\omega)\right]^2 \chi^{(1)}(2\omega)$$

Phương trình sóng đối với môi trường phi tuyến

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

Được rút ra trong chương này, nhưng chưa thu được nghiệm tổng quát của nó. Dạng một chiều của phương trình sóng được xét cho trường hợp khi $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = 0$. Kết quả là định luật bảo toàn năng lượng được gọi là hệ thức Manley-Rowe,

$$\frac{1}{\omega_1}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_1 E_1^*) = \frac{1}{\omega_2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_2 E_2^*) = -\frac{1}{\omega_3}\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu}}\frac{\partial}{\partial z}(E_3 E_3^*)$$

Bằng cách giả sử rằng tương tác phi tuyến yếu, để hai sóng tới có thể xem như không đổi, và bằng cách dùng sự bảo toàn năng lượng, mật độ thông lượng của sóng phi tuyến được tạo ra bằng

$$S_3 = \frac{\omega_3^2}{2n_1 n_2 n_3}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)^3} d^2 L^2 S_1 S_2 \left[\frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)^2}\right]$$

Vì vector Poynting tỉ lệ với d^2 và $1/n^3$, chúng ta định nghĩa hệ số phẩm chất của các vật liệu phi tuyến

$$\mathrm{M} = \frac{d^3}{n^3}$$

Hệ số phẩm chất này cho phép so sánh tính năng của các vật liệu phi tuyến. Nếu $\Delta k \neq 0$, thì các sóng cơ bản ở tần số ω_1 và ω_2 truyền với vận tốc khác với vận tốc của sóng hài phi tuyến được tạo ra ở tần số ω_3. Các sóng lệch pha trong khoảng cách được gọi là chiều dài kết hợp. Đối với sự tạo sóng hài bậc hai, độ dài kết hợp bằng

$$\ell_c = \frac{\lambda_1}{4(n_3 - n_1)}$$

Trên khoảng cách bằng chiều dài kết hợp, năng lượng được chuyển từ sóng cơ bản sang sóng hài. Trên khoảng cách từ ℓ_c đến $2\ell_c$, năng lượng được chuyển ngược lại từ sóng hài sang sóng cơ bản. Sự chuyển năng lượng tuần hoàn này tiếp tục miễn là các sóng vẫn còn trong môi trường phi tuyến. Khi $\Delta k = 0$, các sóng hợp pha và tất cả năng lượng được chuyển từ sóng cơ bản sang sóng hài. Chẳng hạn, biên độ của sóng hài được tạo ra trong các điều kiện hợp pha ở vị trí L trong môi trường phi tuyến là $E(2\omega) = E_0(\omega)\tanh\left[E_0(\omega)Ld\omega\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right]$

Hợp pha có thể được tạo ra bởi

1. Sự biến thiên tuần hoàn của hệ số phi tuyến.
2. Dùng sự biến đổi pha do phản xạ toàn phần.
3. Dùng chiết suất của các mode khác nhau trong ống dẫn sóng điện môi.
4. Dùng các vector sóng không song song để tạo ra $\Delta\mathbf{k} = 0$.
5. Dùng sự kiện chiết suất tia bất thường trong môi trường lưỡng chiết có thể thay đổi từ n_e đến n_o bằng cách điều chỉnh hướng truyền.

Sự hợp pha dùng tính lưỡng chiết được tạo ra bằng cách thõa mãn một trong bốn phương trình sau:

$n_e \langle n_0$ $\qquad\qquad$ $n_e \rangle n_o$

Type I

$$n_e(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2), \qquad n_0(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_e(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_e(\omega_2)$$

Type II

$$n_e(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_e(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2), \qquad n_0(\omega_3) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_e(\omega_2)$$

Chỉ sự phi tuyến bậc ba được thảo luận, sự phi tuyến gắn với liên hợp pha. Sự phi tuyến bậc ba liên quan đến bốn sóng; biên độ phức của các sóng 3 và 4 được cho bởi phương trình

$$\frac{dA_4}{dz} = -i\frac{\omega\chi^{(3)}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_1 A_2 A_3^*$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = -i\frac{\omega\chi^{(3)*}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_1^* A_2^*$$

Ảnh hưởng của các sóng 1 và 2 được tính hợp vào trong lí thuyết bằng cách dùng hệ số ghép

$$\mathbf{K}= \frac{\omega\chi^{(3)*}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_1^* A_2^*$$

Biên độ phức của sóng 3

$$A_3(z) = \frac{\cos|\mathbf{k}z|}{\cos|\mathbf{k}|L} + i\mathbf{k}^* \frac{\sin|\mathbf{k}|(z-L)}{|\mathbf{k}|\cos|\mathbf{k}|L} A_4^*(0)$$

Tỉ lệ với liên hợp của sóng bốn tại z=0.

.